

UNIVERSITÉ DE LA MEDITERRANEE  
AIX-MARSEILLE II  
U.F.R Sciences de Luminy

## Rapport de stage de Master 1

---

# TOURS DE GROUPES ET DIAGRAMMES DE BRATTELI

---

Loïc POULAIN D'ANDECY

*Master Physique et Sciences de la Matière  
Parcours Physique Théorique et Mathématique*

sous la direction de :  
Oleg OGIEVETSKY

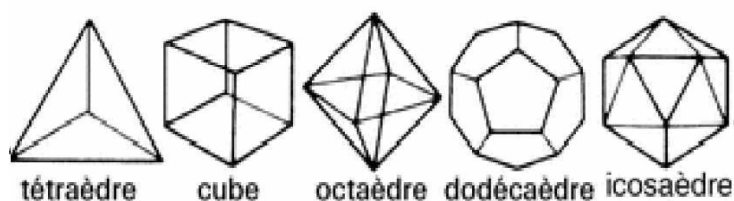
*Centre de Physique Théorique, CNRS Luminy, F-13288 Marseille Cedex 9*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Le groupe symétrique</b>	<b>6</b>
2.1	Code génétique . . . . .	6
2.2	Théorie des représentations : approche de Okounkov-Vershik . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Tours d'algèbres locales et stationnaires</b>	<b>12</b>
3.1	Définitions et exemples . . . . .	12
3.2	Diagramme de Bratteli . . . . .	16
3.3	Base de Gelfand-Tsetlin et algèbre de Gelfand-Tsetlin . . . . .	20
3.3.1	Construction dans le cas d'un diagramme simple . . . . .	20
3.3.2	Exemples de bases de Gelfand-Tsetlin . . . . .	22
3.3.3	Généralisation de la base de Gelfand-Tsetlin lorsque le diagramme n'est pas simple	23
<b>4</b>	<b>Codes génétiques de <math>A_n</math></b>	<b>23</b>
4.1	Code de Moore . . . . .	24
4.2	Le code de Carmichael . . . . .	26
4.3	Nouveau code génétique . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Début d'une nouvelle approche pour la théorie des représentations des groupes alternés</b>	<b>29</b>
5.1	Classes de conjugaison dans $A_n$ . . . . .	29
5.2	Générateurs des algèbres de Gelfand-Tsetlin . . . . .	32
5.2.1	Algèbre de Gelfand-Tsetlin de $A_3$ . . . . .	32
5.2.2	Algèbre de Gelfand-Tsetlin de $A_4$ . . . . .	32
5.2.3	Algèbre de Gelfand-Tsetlin de $A_5$ . . . . .	33
5.2.4	Algèbre de Gelfand-Tsetlin de $A_6$ et $A_7$ et perspectives . . . . .	34
<b>6</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>35</b>
<b>A</b>	<b>Diagramme de Bratteli pour la chaîne des groupes symétriques</b>	<b>36</b>
<b>B</b>	<b>Diagramme de Bratteli pour la chaîne des groupes alternés</b>	<b>37</b>
<b>C</b>	<b>Démonstration du Théorème 5.4</b>	<b>38</b>
<b>D</b>	<b>Construction explicite des représentations irréductibles de <math>A_5</math></b>	<b>38</b>
D.1	Représentation 4 de $A_5$ . . . . .	39
D.2	Représentation 6 de $A_5$ . . . . .	39
D.3	Représentation 5 de $A_5$ . . . . .	40

# 1 Introduction

En géométrie, les solides de Platon sont les polyèdres réguliers convexes. Il y en a 5 : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, l'icosaèdre et le dodécaèdre (voir [1]). En raison de leur esthétisme et de leur symétrie, ils ont été étudiés depuis longtemps par les géomètres et les mathématiciens. En dépit de leur nom, ils semblent avoir été connus par les peuples néolithiques d'Écosse qui ont construit des modèles en pierre de ces solides au moins 1000 ans avant Platon.



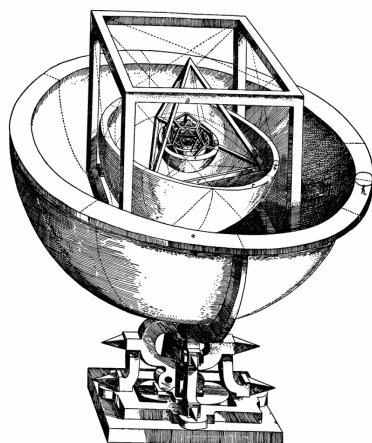
**Fig. 1 :** *les cinq solides de Platon.*

Dans la philosophie de Platon, ils jouent un rôle primordial car il associe un de ces solides à chacun des 4 éléments physiques (Feu, Terre, Eau, Air) ([2]). Ainsi, la brûlure du Feu est associée à la pointe du tétraèdre. L'Eau s'échappe de la main lorsque l'on veut la saisir, comme si elle était constituée de minuscules boules : c'est l'icosaèdre. Par contraste, la Terre s'émiette et se casse en petits grains entre les doigts : Platon lui associe le Cube. Enfin, l'octaèdre représente l'Air car les composants de l'Air sont si doux que l'on peut à peine les sentir. Le dodécaèdre est mis par Platon en correspondance avec le Tout car c'est celui qui ressemble le plus à une sphère : c'est "le Dieu utilisé pour arranger les constellations dans tout le Ciel". Aristote a nommé cet élément *aithêr* (éther en français) et a postulé que l'Univers était rempli par cet élément (théorie qui était encore d'actualité à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle).

Plus récemment, l'astronome J. Kepler proposa dans son *Mysterium Cosmographicum* (1596) un modèle du système solaire basé sur les solides de Platon. Dans ce modèle les 5 solides étaient les uns dans les autres et séparés par des sphères inscrites et circonscrites. Les 6 sphères obtenues correspondaient aux orbites des 6 planètes connues à l'époque. Ainsi, les distances entre planètes étaient fixées par les solides de Platon.

De nos jours, les solides de Platon sont encore très présents autour de nous (architecture, pierres précieuses...), mais aussi très étudiés en physique (physique du solide, cristallographie) et mathématique.

L'étude moderne de ces polyèdres réguliers est basée sur leurs groupes de symétrie : c'est-à-dire



**Fig. 2 :** *le système solaire de Kepler.*

l'ensemble des transformations orthogonales de l'espace qui laissent invariant le polyèdre. Leur étude fait donc intervenir la théorie des groupes finis et de leurs représentations.

L'exemple fondamental de groupes finis est le groupe symétrique : c'est le groupe des bijections (on dit aussi permutations) d'un ensemble fini à  $n$  éléments dans lui-même. Il est noté  $S_n$ . Par le théorème de Cayley on a que tout groupe fini est un sous-groupe d'un groupe de permutations. Le groupe  $S_n$  peut être vu comme un sous-groupe du groupe orthogonal  $O(n)$  (l'action de  $S_n$  sur un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  se fait par permutation des vecteurs de base, et ainsi les matrices de  $GL(n)$  correspondant aux éléments de  $S_n$  sont des matrices inversibles avec le nombre 1 une seule fois dans chaque ligne et des 0 partout ailleurs). Le groupe alterné d'ordre  $n$  est le sous-groupe de  $S_n$  constitué par les éléments dont le déterminant est égal à  $+1$  ; il est noté  $A_n$ . La restriction du déterminant des matrices au groupe  $S_n$  est appelée la signature d'une permutation. On a que toute permutation peut se décomposer en produit de transpositions<sup>1</sup>, et la signature est le morphisme de groupe de  $S_n$  dans  $\{-1, +1\}$  qui associe  $-1$  aux transpositions. Ainsi, le groupe alterné  $A_n$  est le sous-groupe de  $S_n$  ne contenant que les permutations qui se décomposent en un produit d'un nombre pair de transpositions.

En fait, la théorie des groupes est née au début du XIX<sup>ème</sup> siècle lorsque Evariste Galois a étudié la résolubilité par radicaux des équations polynomiales à une variable. Les objets fondamentaux pour répondre à cette question sont les groupes de permutations des racines de l'équation.

Dans l'étude des symétries des solides de Platon, les groupes symétriques et alternés apparaissent. On distingue le groupe de symétrie total du polyèdre par rapport au groupe de symétrie sans compter les réflexions, qui est souvent appelé le groupe propre. Notons qu'en tant que dual l'un de l'autre, le cube et l'octaèdre ont les mêmes symétries, ainsi que l'icosaèdre et le dodécaèdre. Le tétraèdre, lui, est son propre dual. Il s'avère que le groupe de symétrie propre du dodécaèdre est le groupe alterné d'ordre 5,  $A_5$ , il permute les 5 tétraèdres inscrits dans un dodécaèdre. Le groupe de symétrie du tétraèdre est  $S_4$ , qui permute les 4 sommets, et son groupe de symétrie propre est  $A_4$ . De plus, ces deux derniers résultats se généralisent, en effet, on peut définir l'analogue du tétraèdre en dimension supérieure, c'est ce que l'on appelle un simplexe régulier ou  $n$ -simplexe régulier. Dans un espace de dimension au moins

---

<sup>1</sup>Une transposition est une permutation qui échange deux éléments et laisse stables les autres.

$n$ , un  $n$ -simplexe est l'enveloppe convexe de  $n + 1$  points tels que ces  $n + 1$  points n'appartiennent pas tous à un même sous-espace de dimension  $n - 1$ . Il est régulier lorsqu'il est de plus un *polytope régulier* (voir [1]). On a alors la propriété suivante :

**Propriété.** *Le groupe de symétrie d'un  $n$ -simplexe régulier est le groupe  $S_n$ , et son groupe de symétrie propre est le groupe  $A_n$ .*

A ce jour, la théorie des représentations des groupes symétriques et alternés est complètement aboutie. On connaît toutes les représentations irréductibles, les règles de branchement d'une représentation irréductible de  $S_n$  dans  $S_{n-1}$ , et aussi dans  $A_n$ . La formule de Frobenius permet de calculer la valeur des caractères de chaque représentation. Les objets fondamentaux sont les diagrammes et tableaux de Young.

Plus récemment, A. Okounkov et A. Vershik ont retrouvé certains des résultats connus pour le groupe symétrique par une nouvelle approche, qui a l'avantage d'expliquer l'apparition des diagrammes et tableaux de Young ([3, 4, 5]). De plus, il est attendu que cette approche puisse s'adapter aux autres groupes de Coxeter, ainsi qu'à une certaine classe d'algèbres : les tours d'algèbres locales et stationnaires. Elle a été adaptée avec succès aux cas des algèbres de Hecke ([6, 7]) et des algèbres de Birman-Murakami-Wenzl ([8]). Les propriétés de localité et de stationnarité jouent un rôle important dans cette nouvelle approche, mais ce qui semble fondamental aussi est l'existence d'un ensemble de générateurs des sous-algèbres commutatives maximales, qui sont dans le cas des groupes symétriques les éléments de Jucys-Murphy et qui sont liés aux algèbres de Hecke affines dégénérées. Dans le cas non-dégénéré (au niveau des algèbres de Hecke, ou encore des groupes de tresses), la construction d'éléments de Jucys-Murphy fait intervenir l'équation dite "équation de réflexion" (de la forme  $RLRL = LRLR$ ) qui apparaît dans de très nombreux domaines a priori bien distincts. En effet, cette équation intervient dans la diffusion de particules sur une demi-droite ([9]), dans la théorie des noeuds sur le tore ([10]), dans les systèmes intégrables à bord lorsque l'on considère l'équation de réflexion avec un paramètre spectral ([11]). Dans [12, 13, 14], la notion de paire compatible  $(\hat{R}, \hat{F})$  est utilisée pour définir une algèbre matricielle quantique pour laquelle beaucoup de notions d'algèbre linéaire peuvent être généralisées ; cette construction généralise le cas  $\hat{F} = \hat{R}$  pour lequel cette algèbre matricielle quantique est définie par l'équation de réflexion. Les espaces de Minkowski  $q$ -déformés étudiés dans [15, 16, 17] sont en fait définis par une équation de réflexion ([18]). D'autres isomorphismes "accidentels" de groupes quantiques utilise toujours une construction du type équation de réflexion ([19]). Enfin, des opérateurs de Jucys-Murphy sont indispensables pour la construction du calcul différentiel et de l'opérateur BRST sur les algèbres de Lie quantiques ([20, 21, 22]).

Dans la section 2, nous rappelons la présentation usuelle par générateurs et relations (présentation d'Artin) du groupe symétrique, avant de résumer le fond de la nouvelle approche développée par A. Okounkov et A. Vershik, en insistant en particulier sur la construction des éléments de Jucys-Murphy dans le cas dégénéré des groupes symétriques, dans le cas non-dégénéré des algèbres de Hecke ainsi que le lien avec l'équation de réflexion.

Ensuite, nous rappelons dans la section suivante la définition de tour d'algèbres locale et stationnaire (au sens de [24]), de diagrammes de Bratteli, ainsi que d'objets fondamentaux de la nouvelle approche, qui sont appelés la base de Gelfand-Tsetlin et l'algèbre de Gelfand-Tsetlin.

Dans la section 4, nous analysons deux codes génétiques (*i.e.* présentations par générateurs et relations) connus des groupes alternés : le code de Moore ([25]) et celui de Carmichael ([25]), puis

nous en donnons un nouveau qui munit la chaîne des groupes alternés d'une structure de tour locale et stationnaire (il s'avère que ce nouveau code est très semblable au code trouvé dans [26]). Pour chaque code, nous construisons l'algorithme de Coxeter-Todd et donnons une forme normale.

Dans la section suivante, nous commençons à tenter d'adapter la nouvelle approche à la tour des groupes alternés. Nous rappelons la structure des classes de conjugaison dans  $A_n$ , et des orbites pour la conjugaison par  $A_{n-1}$  dans  $A_n$ . Nous commençons également à construire des analogues des éléments de Jucys-Murphy pour les groupes  $A_n$  (nous étudions les petits  $n$ ).

## Notations

Nous travaillerons toujours sur le corps des nombres complexes  $\mathbb{C}$ .

La convention utilisée pour l'écriture d'un produit de permutation est la suivante : pour  $\pi, \sigma \in S_n$ , on définit le produit  $\pi\sigma$  comme  $\sigma$  appliquée en premier, puis  $\pi$ . Par exemple, le produit  $(1, 2)(1, 3)$  est égal à  $(1, 3, 2)$  et non à  $(1, 2, 3)$  (on a utilisé la notation cyclique, voir section 5).

Nous noterons l'algèbre des matrices carrées de taille  $n$  par  $Mat(n)$ , et l'algèbre des opérateurs linéaires sur un espace vectoriel  $V$  par  $End(V)$ .

## Remerciements

Je remercie vivement le Centre de Physique Théorique de Marseille pour m'avoir accueilli en stage de Master 1.

Je suis très reconnaissant envers Oleg Ogievetsky pour m'avoir proposé ce sujet, pour le temps consacré et l'encadrement durant tout le stage. Je remercie également mon rapporteur Robert Coquereaux pour ses corrections et suggestions.

## 2 Le groupe symétrique

### 2.1 Code génétique

Le groupe symétrique est un cas particulier de groupe de Coxeter fini. En fait  $S_{n+1}$  est le groupe de Coxeter de type  $A_n$ . Un système de Coxeter est un ensemble de générateurs  $\{s_1, \dots, s_n\}$  avec une matrice symétrique  $(m_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  à coefficients entiers avec  $m_{ii} = 1$  et  $m_{ij} \geq 2$  pour  $i \neq j$ . Le groupe de Coxeter associé à un système de Coxeter est le groupe engendré par les  $s_1, \dots, s_n$  et par les relations :

$$\forall i, j \in 1, \dots, n : \quad (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1. \quad (1)$$

La matrice des  $(m_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  est nommée la matrice de Coxeter du système.

En particulier, le groupe symétrique  $S_n$  est généré par les générateurs  $\{s_i\}_{i=1,\dots,n-1}$  et les relations :

$$\begin{cases} s_i^2 = 1 & \text{pour tout } i \in 1, \dots, n-1, \\ s_i s_j = s_j s_i & \text{pour tout } i, j \text{ tels que } |i-j| > 1, \\ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} & \text{pour tout } i \in 1, \dots, n-2. \end{cases} \quad (2)$$

**Remarque :** La matrice de Coxeter pour  $S_n$  est la matrice  $(n-1) \times (n-1)$  telle que :

$$\begin{aligned} m_{ii} &= 1, \\ m_{ii+1} &= m_{i+1i} = 3, \\ m_{ij} &= 2 \quad \text{pour tout } i, j \text{ tels que } |i-j| > 1. \end{aligned}$$

A titre d'exemple pour la section sur les groupes alternés, nous donnons la construction de l'algorithme de Coxeter-Todd du code (2) qui permet de déduire une forme *normale*, ou *standard* (une forme normale est une façon d'écrire n'importe quel élément du groupe sous une certaine forme à partir des générateurs, et cette écriture est unique pour chaque élément).

L'algorithme de Coxeter-Todd est un procédé de construction de classes d'équivalence étant donné un sous-groupe : les classes à droite par ce sous-groupe. Plus précisément, soit  $G$  un groupe fini et  $H$  un sous-groupe de  $G$ . On peut définir la relation d'équivalence dans  $G$  suivante :

$$x \sim y \iff \exists h \in H \text{ tel que } x = yh.$$

On appelle les classes à droite par  $H$  les classes d'équivalence pour la relation d'équivalence ci-dessus. Elles sont de la forme  $xH$  avec  $x \in G$  et on a soit  $xH = yH$  ( $\Leftrightarrow x \sim y$ ), soit  $xH \cap yH = \emptyset$ . On note  $G/H$  l'ensemble de ces classes.  $H$  est la classe de l'élément neutre (c'est l'ensemble des éléments de  $H$ ). Soit  $(g_1, \dots, g_m)$  un ensemble de générateurs de  $G$  avec des relations définissantes. L'algorithme de Coxeter-Todd consiste à décrire l'ensemble des classes  $G/H$  ainsi que l'action des générateurs sur ces classes. Pour ce faire, on trace un diagramme de la manière suivante : les sommets du diagramme sont les différentes classes  $gH$  et l'action des générateurs est représentée par des flèches entre les sommets. On a terminé l'algorithme lorsque l'on connaît l'action de tous les générateurs sur toutes les classes du diagramme.

Dans la pratique, on commence à placer le sommet correspondant à la classe  $H$ . Pour les générateurs  $g_i$  de  $G$  qui sont dans  $H$ , cette classe est invariante. Pour chaque  $g_i$  qui n'est pas dans  $H$ , on trace une flèche labellisée  $g_i$  de  $H$  vers une nouvelle classe  $g_iH$ . Pour chacun de ces nouveaux sommets et en utilisant les relations définissantes, on cherche pour chaque générateur  $g_j$  l'action sur la classe correspondante, et en fait on a les 3 possibilités suivantes :

- Le générateur  $g_j$  laisse cette classe invariante (dans ce cas on trace une boucle labellisée  $g_j$  autour du sommet correspondant).
- Le générateur  $g_j$  renvoie cette classe vers une classe que l'on a déjà placée sur le diagramme.
- Le générateur  $g_j$  envoie cette classe vers une nouvelle classe.

On continue tant que l'on ne connaît pas l'action de tous les générateurs sur toutes les classes du diagramme.

Notons qu'un algorithme de Coxeter-Todd est défini par la donnée d'un couple  $(G, H)$  où  $H$  est un sous-groupe de  $G$ , et d'une présentation de  $G$ .

Notons  $H_n$  le groupe engendré par les générateurs vérifiant le code (2). Pour la simplicité de l'algorithme, il convient de choisir un sous-groupe assez "gros", et ici le candidat idéal est le sous-groupe de  $H_n$  engendré par les générateurs  $s_1, \dots, s_{n-2}$  que l'on note  $H$ . Remarquons que dans le cas de générateurs d'ordre 2, toute flèche du diagramme de Coxeter-Todd revient sur elle-même. On peut donc les remplacer par des segments non-orientés.



**Fig. 3 :** L'algorithme de Coxeter-Todd pour le code (2) avec  $(H_n, H)$ .

La première classe est  $H$ . Le seul générateur qui ne laisse pas  $H$  invariante est  $s_{n-1}$ , on en déduit donc une nouvelle classe  $s_{n-1}H$  (cf figure 3). Ensuite,  $s_1, \dots, s_{n-3}$  commutent avec  $s_{n-1}$  et laissent  $H$  invariante, donc ils laissent la classe  $s_{n-1}H$  invariante également. Il y a ainsi une seule nouvelle classe qui est  $s_{n-2}s_{n-1}H$ . De même, les générateurs  $s_1, \dots, s_{n-4}$  laissent invariante cette classe, et de plus :

$$\begin{aligned} s_{n-1} \cdot s_{n-2}s_{n-1}H &= s_{n-2}s_{n-1}s_{n-2}H \\ &= s_{n-2}s_{n-1}H \end{aligned} .$$

De manière plus générale, soit la classe  $s_k s_{k+1} \dots s_{n-1}H$ , on a :

$$\begin{aligned} s_i \cdot s_k s_{k+1} \dots s_{n-1}H &= s_k s_{k+1} \dots s_{n-1}H \quad \text{pour } i < k-1, \\ s_i \cdot s_k s_{k+1} \dots s_{n-1}H &= s_k \dots s_i s_{i-1} s_i \dots s_{n-1}H \\ &= s_k \dots s_{i-1} s_i s_{i-1} \dots s_{n-1}H \\ &= s_k \dots s_{i-1} s_i \dots s_{n-1} s_{i-1}H \quad \text{car } s_{i-1} \text{ commute avec } s_{i+1}, \dots, s_{n-1} \\ &= s_k \dots s_{i-1} s_i \dots s_{n-1}H \\ &= s_k \dots s_{n-1}H \quad \text{pour } i \in \{k+1, \dots, n-1\}. \end{aligned}$$

Donc pour la classe  $s_k s_{k+1} \dots s_{n-1}H$ , les seuls générateurs qui ne la laissent pas stable sont  $s_k$ , qui la ramène à la classe précédente, et  $s_{k-1}$  qui crée une nouvelle classe (sur la droite, cf figure 3). Ainsi, on arrive jusqu'à la classe  $s_1 s_2 \dots s_{n-1}H$  et l'algorithme est terminé.

L'algorithme permet de majorer le cardinal du groupe  $H_n$ . On compte le nombre de classes sur la figure : il y en a  $n$  sur la figure, ce qui fait qu'il y a au plus  $n$  classes différentes. Et on raisonne par récurrence :

- Pour  $n = 2$ , le groupe  $H_2 = \langle s_1 \mid s_1^2 = 1 \rangle$  est le groupe  $S_2$ .
- Supposons que  $H_{n-1} \cong S_{n-1}$ , alors  $|H_{n-1}| = (n-1)!$  et donc pour le sous-groupe  $H$  de  $H_n$ ,  $|H| \leq (n-1)!$  (cf remarque (2.1) ci-dessous). Or chaque classe a le même cardinal que  $H$  et la somme des cardinaux des classes donne le cardinal de  $H_n$  donc :

$$|H_n| \leq n \times (n-1)!.$$

- En conclusion,  $|H_n| \leq |S_n|$ .

L'autre inégalité provient du morphisme de  $H_n$  dans  $S_n$  suivant :

$$s_i \mapsto (i, i+1).$$

Comme  $S_n$  est engendré par les transpositions de la forme  $(i, i+1)$ , il vient que ce morphisme est surjectif et donc  $|H_n| \geq |S_n|$ . Finalement, d'après la récurrence ci-dessus,  $H_n$  et  $S_n$  ont le même cardinal, et donc le morphisme est un isomorphisme. L'algorithme de Coxeter-Todd peut ainsi être utilisé pour retrouver que le code (2) est bien un code génétique de  $S_n$ .



**Remarque 2.1.** Soit  $G$  un groupe engendré par des générateurs  $g_1, \dots, g_n$  et des relations. Soit  $E$  un sous-ensemble de  $\{1, \dots, n\}$  et soit  $W$  le sous-groupe de  $G$  engendré par les générateurs  $g_i, i \in E$ . Maintenant, considérons un groupe  $\tilde{W}$  qui est engendré par des générateurs  $\tilde{g}_i, i \in E$  et des relations entre les  $\tilde{g}_i$  qui reproduisent les relations du groupe  $G$  ne concernant que les  $g_i, i \in E$ . En général, le cardinal de  $W$  n'est pas égal au cardinal de  $\tilde{W}$ , car les générateurs de  $W$  sont sujets à d'autres relations impliquant les générateurs de  $g_j, j \notin E$ . Ce que l'on peut dire en toute généralité, c'est que  $W$  est un quotient de  $\tilde{W}$  et donc que  $|W| \leq |\tilde{W}|$ . A titre d'exemple, soit :

$$G = \langle x, y \mid x^7 = 1 \text{ et } yxy^{-1} = x^3 \text{ et } y^2 = 1 \rangle,$$

et soit  $W$  le sous-groupe de  $G$  engendré par le générateur  $x$ . Soit  $\tilde{W} = \langle x \mid x^7 = 1 \rangle$ , on a  $|\tilde{W}| = 7$ . Mais dans  $G$  on a, comme  $y^2 = 1$  :

$$x = y^2xy^{-2} = y(x^3)y^{-1} = (yxy^{-1})^3 = (x^3)^3 = x^9 = x^2,$$

donc  $x = x^2$  et donc  $x = 1$  ; ce qui fait que le sous-groupe  $W$  a pour cardinal 1 (c'est le quotient de  $\tilde{W}$  par la relation  $x = 1$ ). On a ici  $|W| < |\tilde{W}|$ .

L'algorithme permet de plus de trouver par récurrence une forme normale pour les éléments de  $S_n$ . En effet, soit  $e$  l'identité, et soient  $R_k = \{e, s_{k-1}, s_{k-2}s_{k-1}, \dots, s_1s_2 \dots s_{k-1}\}$  pour  $k = 2, \dots, n$ . On sait que tout élément de  $S_n$  appartient à l'une des classes de la figure 3 et donc peut s'écrire de manière unique comme  $u_n h$  où  $u_n \in R_n$  et  $h \in S_{n-1}$ . Ainsi, par récurrence, on obtient :

**Proposition 2.2.** Soit  $x \in S_n$  avec  $n \geq 2$ , alors  $x$  s'écrit de façon unique comme  $x = u_n u_{n-1} \dots u_2$  où  $u_k \in R_k$  pour tout  $k = 2, \dots, n$ .

L'algorithme de Coxeter-Todd fournit un outil puissant pour confirmer qu'un groupe est caractérisé par certains générateurs avec des relations et pour déduire une forme normale. C'est l'approche que nous reproduirons pour les groupes alternés.

## 2.2 Théorie des représentations : approche de Okounkov-Vershik

La théorie des représentations des groupes symétriques est connue depuis longtemps (voir e.g. [27, 28, 29]). On connaît toutes les représentations irréductibles et on sait calculer leurs caractères. Le principal résultat est le suivant :

**Théorème 2.3.** Il y a une bijection entre les représentations irréductibles de  $S_n$  et les diagrammes de Young à  $n$  cases.

Chaque diagramme de Young à  $n$  cases correspond à une partition  $\lambda$  de l'entier  $n$  :  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_i)$  où  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_i$  et  $\sum_{k=1}^i \lambda_k = n$ . Explicitement, le diagramme associé à  $\lambda$  est constitué de  $i$  lignes où la  $k^{ieme}$  ligne contient  $\lambda_k$  cases (en annexe A, on a remplacé les cases par des points). Ainsi toutes les représentations irréductibles sont connues, car pour deux partitions différentes, les représentations associées sont non-isomorphes, et il y a autant de partitions de  $n$  que de classes de conjugaison dans  $S_n$ .

On connaît également les règles de branchement qui donnent la décomposition d'une représentation de  $S_n$  en représentations irréductibles de  $S_{n-1}$ . On résume ainsi tout cela au graphe de Young dont le début est donné en annexe A, qui est un cas particulier de diagramme de Bratteli où les branchements sont simples dans le sens où toutes les multiplicités d'une représentation d'un étage dans une de l'étage du dessous sont de 0 ou 1. Les nombres à côté de chaque diagramme sont les dimensions des représentations irréductibles associées.

Une nouvelle approche a été développée par A. Okounkov et A. Vershik. Comme ils le soulignent dans [3], l'approche traditionnelle historiquement initiée par Young, Frobenius et Schur notamment, utilise des outils (combinatoires) éloignés de la théorie des représentations. Elle n'introduit pas naturellement mais plutôt *a priori* les objets fondamentaux que sont les diagrammes et tableaux de Young. De plus, les règles de branchement ne jouent pas un rôle fondamental, elles sont déduites à la fin après le développement complet de la théorie.

Leur nouvelle approche fait jouer un rôle clé aux notions de tour d'algèbres locale et stationnaire, de base de Gelfand-Tsetlin et aux éléments de Jucys-Murphy. On va ici en présenter les étapes principales (pour les preuves, les détails et les développements, voir [3, 4, 5, 30])

- On peut montrer par un argument direct que le branchement de  $S_{n-1}$  dans  $S_n$  est simple (par exemple dans [3, 30] ou en annexe C).
- En conséquence, chaque représentation irréductible de  $S_n$  se décompose en une somme de représentations irréductibles de  $S_{n-1}$  où les coefficients sont 1. De même, chaque représentation irréductible de  $S_{n-1}$  se décompose en une somme de représentations irréductibles de  $S_{n-2}$  et ainsi de suite jusqu'à  $S_1$ . On en déduit que chaque représentation irréductible de  $S_n$  se décompose en somme de représentations unidimensionnelles de  $S_1 = \{e\}$ , et cette décomposition est canonique. On construit ainsi une base canonique (une représentation unidimensionnelle donne un vecteur défini à une constante près) appelée dans [3] la base de Gelfand-Tsetlin (GZ-base). Le nombre des GZ-vecteurs est la somme des dimensions des représentations irréductibles de  $S_n$  et chaque vecteur correspond à un chemin du premier étage jusqu'au  $n^{ième}$  dans le diagramme de Bratteli en annexe A.
- Dans l'algèbre de groupe  $\mathbb{C}[S_n]$ , il est défini dans [3] l'algèbre de Gelfand-Tsetlin (GZ-algèbre) comme l'algèbre engendrée par les centres  $Z_i$  des algèbres  $\mathbb{C}[S_i]$ . C'est une algèbre commutative et on peut prouver que c'est l'algèbre de tous les opérateurs diagonaux dans la GZ-base. C'est une sous-algèbre commutative maximale de  $\mathbb{C}[S_n]$ , et sa dimension est la somme des dimensions des représentations irréductibles de  $S_n$ . On peut lui associer comme base la GZ-base.
- Les éléments de Jucys-Murphy  $X_i \in \mathbb{C}[S_i]$  sont définis par :

$$X_1 = 0, \quad X_{n+1} = s_n + s_n X_n s_n \quad \text{où les } s_i \text{ sont les générateurs de Coxeter de (2)}$$

On peut montrer par récurrence que  $X_n = (1, n) + (2, n) + \dots + (n-1, n)$  (la somme des transpositions impliquant l'élément  $n$ ). Le résultat principal est que ces éléments commutent entre eux, et surtout, les  $n$  premiers engendrent l'algèbre commutative maximale de  $\mathbb{C}[S_n]$  (la GZ-algèbre). Ainsi, ce sont des éléments que l'on peut diagonaliser simultanément dans toutes les représentations irréductibles de  $S_n$ .

En fait, étant donné  $s_1, \dots, s_n$  vérifiant le code du groupe symétrique (2) :

$$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, \quad s_i^2 = 1, \quad s_i s_j = s_j s_i \quad \text{pour } |i - j| > 1.$$

on peut construire une suite d'éléments qui commutent entre eux par la formule de récurrence  $X_{n+1} = s_n + s_n X_n s_n$ , si l'on impose comme conditions initiales :  $X_1 X_2 = X_2 X_1 \Leftrightarrow X_1(s_1 + s_1 X_1 s_1) = (s_1 + s_1 X_1 s_1) X_1$ .

L'algèbre engendrée par  $s$ ,  $X$  et  $X'$  vérifiant :

$$s^2 = 1, \quad X X' = X' X, \quad X' = s + s X s,$$

est appelée l'algèbre de Hecke affine dégénérée.

Au niveau de la chaîne des groupes de tresses  $B_0 = \{e\} \subset B_1 \subset \dots \subset B_n \dots$ , où  $B_n$  est engendré par  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$  vérifiant  $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$  et  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$  si  $|i - j| > 1$ , la construction d'éléments de Jucys-Murphy se fait à partir de la condition initiale  $j_1 = 1$  avec la formule de récurrence :

$$j_{n+1} = \sigma_n j_n \sigma_n, \tag{3}$$

Ils commutent entre eux.

En fait, pour que les éléments définis par la relation de récurrence (3) forment un ensemble commutatif, il suffit de prendre comme condition initiale que  $j_1$  commute avec  $j_2$ , qui est en fait l'équation de réflexion :

$$j_1 \sigma_1 j_1 \sigma_1 = \sigma_1 j_1 \sigma_1 j_1.$$

Les algèbres de Hecke  $H_n$  sont les quotients des  $\mathbb{C}[B_n]$  par les relations :

$$\sigma_i^2 = \lambda \sigma_i + 1, \tag{4}$$

pour un paramètre  $\lambda$ . L'algèbre de Hecke affine est l'algèbre engendrée par  $\sigma$ ,  $j$  et  $j'$  vérifiant :

$$\sigma^2 = \lambda \sigma + 1, \quad j' = \sigma j \sigma, \quad j' j = j j'.$$

Elle est réalisé par  $\sigma_i$ ,  $j_i$  et  $j_{i+1}$  pour tout  $i$ . On retrouve le cas dégénéré en définissant  $X_n$  comme le terme en  $\lambda$  de  $j_n$ . On peut facilement vérifier que l'on obtient ainsi la formule de récurrence  $X_{n+1} = \sigma_n + \sigma_n X_n \sigma_n$  avec la condition initiale  $X_1 = 0$ . On prend ensuite la "limite classique"  $\lambda \rightarrow 0$  dans (4) pour retrouver la construction dans le cas des groupes symétriques et les algèbres de Hecke affines dégénérées (pour plus de détails et de développement autour du terme Hecke, voir par exemple [23]).

- Alors à chaque vecteur  $v$  de la GZ-base, le *poids* de  $v$  est défini comme :  $\alpha(v) = (a_1, \dots, a_n)$  où les  $a_i$  sont les valeurs propres des  $X_i$  par rapport à  $v$ . On note :

$$Spec(n) = \{\alpha(v), v \in \text{GZ-base}\}.$$

et comme chaque vecteur  $v$  est (à un scalaire près) déterminé par les valeurs prises par les  $X_i$  sur lui, on a que le cardinal de  $Spec(n)$  est égal à la somme des dimensions des représentations irréductibles de  $S_n$ .

- On définit la relation d'équivalence :  $\alpha(v_1) \sim \alpha(v_2)$  si  $v_1$  et  $v_2$  appartiennent à la (décomposition de la) même représentation irréductible de  $S_n$ . Clairement

$$|\text{Spec}(n)/\sim| = \text{le nombre de représentations irréductibles de } S_n ;$$

Il faut décrire l'ensemble  $\text{Spec}(n)$  avec la relation d'équivalence  $\sim$ . Pour cela, il faut analyser l'algèbre engendrée par  $s$ ,  $X$  et  $X'$  vérifiant :

$$s^2 = 1, \quad XX' = X'X, \quad X' = s + sXs,$$

(c'est l'algèbre de Hecke affine dégénérée) et sa théorie des représentations. Le fait que l'étude de cette algèbre suffise  $\forall n$  vient de la propriété de stationnarité de la tour des groupes symétriques (voir section suivante) avec le code d'Artin (2). En effet, elle est réalisée par  $s_i$ ,  $X_i$  et  $X_{i+1}$  pour tout  $i$ , et donc ces 3 éléments engendrent un quotient de cette algèbre. La facilité de cette algèbre est due à la propriété de localité (voir section suivante). C'est dans l'étude de  $\text{Spec}(n)/\sim$  qu'apparaissent naturellement les diagrammes et tableaux de Young et ensuite le résultat attendu ([3]) : il existe une bijection entre  $\text{Spec}(n)/\sim$  et l'ensemble des diagrammes de Young à  $n$  cases.

- En conclusion, cette approche ne demande aucune connaissance préalable sur les représentations du groupe symétrique, et elle reconstruit la théorie de manière naturelle. Ainsi, on peut prouver la simplicité du diagramme de Bratteli et des règles de branchement au début, et on aboutit rapidement aux classiques diagrammes de Young.

Dans cette approche, le raisonnement se fait de manière inductive, il faut donc avoir une suite croissante pour l'inclusion d'algèbres : une chaîne d'algèbres. Ensuite pour passer de  $\mathbb{C}[S_n]$  à  $\mathbb{C}[S_{n+1}]$ , on rajoute un générateur, et pour utiliser la récurrence, il faut que les relations du nouveau générateur avec les autres soient les mêmes à chaque étage. Enfin, le fait que les  $s_i$  "n'interagissent" qu'avec leur plus proche voisin joue un rôle important dans l'analyse de  $\text{Spec}(n)$ . Ces propriétés se trouvent être réunies dans les tours d'algèbres locales et stationnaires définies dans [24]. Nous rappelons les définitions dans la section suivante.

### 3 Tours d'algèbres locales et stationnaires

#### 3.1 Définitions et exemples

Une chaîne d'algèbres sur un corps  $\mathbb{K}$  est la donnée d'un ensemble d'algèbres  $(\mathfrak{A}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  telles que  $\mathfrak{A}_i$  soit une sous-algèbre de  $\mathfrak{A}_{i+1}$ . Par convention, on prend  $\mathfrak{A}_0 = \mathbb{K}$ . On notera une chaîne d'algèbres :

$$\mathfrak{A}_0 = \mathbb{K} \subset \mathfrak{A}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{A}_n \subset \dots$$

Une chaîne de groupes :

$$G_0 = \{e\} \subset G_1 \subset \dots \subset G_n \subset \dots$$

est définie de manière similaire. Pour un groupe fini  $G$ , l'algèbre du groupe  $\mathbb{K}[G]$  est définie comme l'espace vectoriel des combinaisons linéaires d'éléments de  $G$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , muni de la loi de multiplication provenant de la multiplication dans  $G$ . Lorsque l'on a une chaîne de groupes, on a également la chaîne des algèbres de groupes associées. On va se restreindre au cas  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

Soit  $\mathfrak{A}$  une algèbre sur  $\mathbb{C}$  engendrée par un nombre infini de générateurs  $x_1, \dots, x_n, \dots$  avec des relations que l'on notera symboliquement  $\{R\}$ . Nous noterons  $\{R_i\}$  le sous-ensemble des relations de  $\{R\}$  qui ne font intervenir que les  $i$  premiers générateurs ( $\{R_0\} := \emptyset$ ). Par définition, on a  $\{R_i\} \subset \{R_{i+1}\}$  pour tout  $i$ . Notons  $\mathfrak{A}_i$  la sous-algèbre de  $\mathfrak{A}$  engendrée par  $x_1, \dots, x_i$  et  $\mathfrak{A}_0 := \mathbb{C}$ . Les sous-algèbres  $\mathfrak{A}_i$  forment une chaîne de sous-algèbres, c'est-à-dire que :

$$\mathfrak{A}_0 = \mathbb{C} \subset \mathfrak{A}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{A}_n \subset \dots$$

*Remarque :* En général, on ne rajoute pas forcément qu'un seul générateur à chaque étage, mais un nombre fini de générateurs. C'est-à-dire que l'on considère l'algèbre engendrée par un ensemble de générateurs  $\{x_k^\alpha, \alpha \in I_k\}$  pour  $k \in \mathbb{N}$  où  $I_k$  est un ensemble fini non-vide pour tout  $k$ . On considère ensuite les sous-algèbres  $\mathfrak{A}_n$  telles que  $\mathfrak{A}_0 = \mathbb{C}$  et pour  $n \geq 1$ ,  $\mathfrak{A}_n$  est engendrée par  $\mathfrak{A}_{n-1}$  et les  $\{x_n^\alpha, \alpha \in I_n\}$ . Il est facile d'adapter les définitions ci-dessous à ce cas général.

Soit  $\tilde{\mathfrak{A}}_i$  l'algèbre engendrée par des générateurs  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_i$  avec des relations qui reproduisent les relations de  $\{R_i\}$ . En général,  $\mathfrak{A}_i$  est un quotient de  $\tilde{\mathfrak{A}}_i$  (voir Remarque 2.1). Dans toute cette section nous supposons que la sous-algèbre  $\mathfrak{A}_i$  de  $\mathfrak{A}$  est isomorphe à  $\tilde{\mathfrak{A}}_i$  pour tout  $i$ . La tour des algèbres  $\mathfrak{A}_i$  sera la donnée de :

$$\mathfrak{A} = \langle x_1, \dots, x_n, \dots \mid \{R\} \rangle, \quad (5)$$

avec les hypothèses ci-dessus.

Une tour de groupes est définie de manière similaire à partir de la donnée de :

$$G = \langle x_1, \dots, x_n, \dots \mid \{R\} \rangle,$$

avec les mêmes hypothèses sur les sous-groupes  $G_i$ . Ainsi, lorsque l'on a une tour de groupes, on a également la tour des algèbres de groupes qui est une tour d'algèbres.

Des exemples de tours de groupes sont les tours des groupes de Coxeter de type  $A$ ,  $B$ , et  $D$  ; il y a également les tours des groupes alternés des groupes de Coxeter de type  $A$ ,  $B$  et  $D$ . Pour les chaînes d'algèbres de Lie de type  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ , il y a les tours de leurs algèbres universelles enveloppantes.

Les propriétés ci-dessous de localité et de stationnarité sont équivalentes pour une tour de groupes ou pour la tour de leurs algèbres de groupes. Il suffit donc de les énoncer pour les tours d'algèbres.

**Définition 3.1.** La tour d'algèbres (5) est locale lorsqu'il existe  $k_0$  tel que pour tout  $i$ , on ait :

$$x_i x_{i+k} = x_{i+k} x_i \quad \forall k \text{ tel que } k > k_0.$$

On dit que la tour est locale de profondeur  $k_0$  avec  $k_0$  le plus petit entier vérifiant la propriété ci-dessus.

Cela signifie que 2 générateurs commutent lorsqu'ils sont séparés par  $k_0$  ou plus étages, ou encore, pour un générateur  $x_j$  arbitraire, il faut se déplacer d'au moins  $k_0 + 1$  pour être sûr de trouver un générateur qui commute avec  $x_j$ . Par exemple une tour d'algèbres commutatives est locale de profondeur 0 et la chaîne des algèbres  $\mathbb{C}[S_n]$  des groupes symétriques munies du code génétique (2) est locale de profondeur 1.

**Définition 3.2.** La tour d'algèbre (5) est stationnaire lorsque pour tout  $p, q \in \mathbb{N}$  :

Les sous-algèbres engendrées par  $x_1, \dots, x_p$  (i.e.  $\mathfrak{A}_p$ ) et  $x_{1+q}, \dots, x_{p+q}$  sont isomorphes. Dans ce cas, il est commode de prendre des relations stationnaires, c'est-à-dire des relations stables par  $x_1 \mapsto x_{1+q}, \dots, x_p \mapsto x_{p+q}$ .

Par exemple, la chaîne des algèbres  $\mathbb{C}[S_n]$  des groupes symétriques munies du code génétique (2) est une tour stationnaire.

Rappelons que :

**Définition 3.3.** Une algèbre associative  $A$  est semi-simple lorsque tout  $A$ -module peut se décomposer en somme directe de modules simples (i.e. qui ne contiennent que  $\{0\}$  et eux-mêmes comme sous-modules). On peut dire aussi que toute représentation peut se décomposer en somme directe de représentations irréductibles.

Pour un groupe fini  $G$ , l'algèbre  $\mathbb{C}[G]$  est semi-simple. Ainsi, lorsque l'on a une tour de groupes, on a également la tour des algèbres de groupes qui est une tour d'algèbres semi-simples.

Ci-dessus, nous avons déjà constaté que la tour des groupes symétriques avec la présentation (2) est locale et stationnaire.

Il convient ici de donner quelques autres exemples pour illustrer l'intérêt de cette notion de tours d'algèbres locales et stationnaires. En effet, beaucoup de chaînes d'algèbres célèbres et très étudiées en mathématique et en physique mathématique ont une structure de tour locale et stationnaire. De plus, la nouvelle approche d'Okounkov et Vershik pour la théorie des représentations du groupe symétrique (voir section précédente) a pour objectif d'être appliquée aux tours d'algèbres locales et stationnaires (voir [3]).

- Dans la section suivante, nous proposons un code génétique pour les groupes alternés  $A_n$  qui munit la chaîne des groupes alternés d'une structure de tour locale et stationnaire (récemment, un code très semblable a été donné dans [26]). On peut donc espérer étudier la théorie des représentations des groupes alternés en s'appuyant sur la structure de tour locale et stationnaire donnée par le code dans [26] ou le code (20) de la section suivante. En particulier, on peut étudier les représentations des groupes alternés sans les considérer comme sous-groupes des groupes symétriques.
- Un premier exemple de tour de groupes locale et stationnaire est la chaîne des groupes de tresses, ou groupes d'Artin  $B_n$ . Le groupe  $B_{n+1}$  est défini comme le groupe engendré par  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  vérifiant :

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \text{et} \quad \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{si } |i - j| > 1. \quad (6)$$

C'est le groupe de tresses à  $n + 1$  brins, chaque générateur  $\sigma_i$  est la tresse qui fait passer le  $i^{ieme}$  brin sur le  $(i + 1)^{ieme}$  brin. Le code génétique ci-dessus munit la chaîne  $B_0 \subset B_1 \cdots \subset B_n$  d'une structure de tour locale et stationnaire de profondeur 1. Le groupe des tresses, notamment à travers ses nombreux liens avec les noeuds et la topologie en dimension 2 et 3, a de très nombreuses implications en physique, par exemple dans les modèles statistiques, dans la diffusion ou en gravité quantique.

Les quotients des groupes de tresses par l'ensemble de relations  $\sigma_i^2 = 1$  sont les groupes symétriques.

- Des quotients très intéressants en physique sont les algèbres de Hecke ([28]). Cette fois-ci, ce sont les quotients des algèbres de groupes  $\mathbb{C}[B_n]$  par les relations  $\sigma_i^2 = (q - q^{-1})\sigma_i + 1$ , pour un certain paramètre  $q$ . Ainsi, l'algèbre de Hecke  $H_{n+1}(q)$  est l'algèbre engendrée par  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  vérifiant :

$$\text{le code (6) et } \sigma_i^2 = (q - q^{-1})\sigma_i + 1.$$

La nouvelle approche de A. Okounkov et A. Vershik discutée dans la section précédente a été adaptée avec succès pour la tour locale et stationnaire des algèbres de Hecke pour  $q$  générique, ce qui est un argument pour le caractère général de cette méthode (voir [6], [7]). Les algèbres de Hecke ont trouvé une spectaculaire application dans la construction d'un nouvel invariant des noeuds par V. Jones. Elles ont également contribué à la découverte des groupes quantiques par M. Jimbo. De plus, M. Freedman et al. les ont proposées comme fondation d'un système de calcul quantique topologique, c'est-à-dire un ordinateur quantique théorique qui emploie des particules à deux-dimensions (anyons) formant des tresses dans l'espace-temps à trois dimensions ([31]).

- Les algèbres de Temperley-Lieb sont aussi très liées avec les tresses. Elles ont été introduites en mécanique statistique, mais sont maintenant reliées avec la théorie des noeuds, et utilisées notamment en gravité quantique à boucles dans le modèle des mousses de spin (*spinfoam*). Ce sont des familles à un paramètre  $\tau$ ; notons-les  $T_n(\tau)$ , alors  $T_n(\tau)$  est engendrée par  $e_i$  pour  $i = 1, \dots, n - 1$ , avec les relations suivantes :

$$\begin{aligned} e_i^2 &= \tau e_i && \text{pour tout } i \in 1, \dots, n - 1, \\ e_i e_{i+1} e_i &= e_i, \\ e_{i+1} e_i e_{i+1} &= e_{i+1}, \\ e_i e_j &= e_j e_i && \text{si } |i - j| \geq 2. \end{aligned}$$

La chaîne des  $T_n(\tau)$  devient avec cette présentation une tour d'algèbres locale et stationnaire de profondeur 1. Ce sont des quotients des algèbres de Hecke, ce qui permet d'étudier leurs représentations pour  $\tau$  générique grâce à la théorie de représentations développée pour les algèbres de Hecke.

- Enfin, on peut citer aussi les algèbres de Birman-Murakami-Wenzl. Ce sont des familles à 2 paramètres  $q$  et  $\nu$ ; notons-les  $BMW_n(q, \nu)$ , alors  $BMW_n(q, \nu)$  est engendrée par  $g_i$  pour  $i$  de 1 à  $n - 1$ , avec les relations suivantes :

$$\begin{aligned} g_i g_{i+1} g_i &= g_{i+1} g_i g_{i+1}, \\ g_i g_j &= g_j g_i && \text{si } |i - j| > 1, \\ (g_i - \nu)(g_i - q)(g_i + q^{-1}) &= 0, \\ e_i g_{i+1}^{\pm 1} e_i &= \nu^{\mp 1} e_i && \text{où } e_i = \frac{(q - g_i)(g_i + q^{-1})}{\nu(q - q^{-1})}. \end{aligned}$$

Elles forment également une tour d'algèbres locales et stationnaires de profondeur 1. Ce sont des quotients des algèbres  $\mathbb{C}[B_n]$  par les deux dernières relations ci-dessus. L'approche de Okounkov et Vershik a été aussi reproduite pour cette chaîne d'algèbres ([8]) pour  $q$  et  $\nu$  générique.

Dans tous les exemples ci-dessus, ce sont des tours d'algèbres dérivées de la chaîne des groupes de Coxeter de type  $A$ . Or, il existe des généralisations aux autres groupes de Coxeter (par exemple la série de type  $B$ , voir [32]).

### 3.2 Diagramme de Bratteli

On peut définir le diagramme de Bratteli pour toute chaîne d'algèbres semi-simples  $\mathfrak{A}_0 = \mathbb{C} \subset \mathfrak{A}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{A}_n \subset \dots$ , donc en particulier pour toutes chaînes de groupes finis. En effet, lorsque  $G$  est un groupe fini, alors  $\mathbb{C}[G]$  est semi-simple. De plus, il existe un résultat similaire pour les groupes de Lie compacts.

Soit  $\mathfrak{A}_0 = \mathbb{C} \subset \mathfrak{A}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{A}_n \subset \dots$  une chaîne d'algèbres semi-simples. On procède ainsi : toute représentation irréductible de  $\mathfrak{A}_n$  est aussi une représentation de  $\mathfrak{A}_{n-1}$ . Elle se décompose donc en somme directe de représentations irréductibles de  $\mathfrak{A}_{n-1}$  par la propriété de semi-simplicité. Pour construire le diagramme de Bratteli, on écrit pour tout  $n$  les représentations irréductibles non-isomorphes de  $\mathfrak{A}_n$  sur une même ligne (par exemple les diagrammes de Young à  $n$  cases pour le groupe symétrique  $S_n$ ). Ensuite on relie une représentation de  $\mathfrak{A}_n$  avec toutes les représentations de  $\mathfrak{A}_{n-1}$  qui interviennent dans sa décomposition. Si une représentation de  $\mathfrak{A}_{n-1}$  intervient plusieurs fois dans la décomposition, on trace plusieurs segments (le nombre de segments est égal à la multiplicité d'une représentation de  $\mathfrak{A}_{n-1}$  dans une représentation de  $\mathfrak{A}_n$ ). L'ensemble des segments donnent les règles de branchement de  $\mathfrak{A}_n$  dans  $\mathfrak{A}_{n-1}$ . Il est commode de noter à côté de chaque représentation sa dimension. Pour cela, on commence par la seule représentation de  $\mathfrak{A}_0$ , qui est de dimension 1, et ensuite pour une représentation donnée, on additionne les dimensions des représentations de la ligne du dessus qui lui sont reliées. En annexe, on donne comme exemple le début du diagramme de Bratteli pour la chaîne des groupes symétriques et le début du diagramme de Bratteli pour la chaîne des groupes alternés.

On voit que ces deux exemples sont des cas particuliers de diagrammes de Bratteli où la multiplicité d'une représentation de  $G_{n-1}$  dans la décomposition d'une représentation de  $G_n$  est au plus 1. Cela motive la définition suivante :

**Définition 3.4.** *On dit que le diagramme de Bratteli (ou que les règles de branchement) d'une chaîne d'algèbres  $\mathfrak{A}_0 = \mathbb{K} \subset \mathfrak{A}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{A}_n \subset \dots$  (resp. d'une chaîne de groupes  $G_0 = \{1\} \subset G_1 \subset \dots \subset G_n \subset \dots$ ) est simple ou sans multiplicité lorsque dans la décomposition d'une représentation irréductible de  $\mathfrak{A}_n$  (resp.  $G_n$ ) en somme directe de représentations irréductibles de  $\mathfrak{A}_{n-1}$  (resp.  $G_{n-1}$ ), les multiplicités sont 0 ou 1. En d'autres termes, dans le diagramme de Bratteli de la chaîne, il n'y a jamais plus de 1 segment reliant 2 représentations.*

La simplicité du diagramme de Bratteli associé à une tour d'algèbres est une propriété très intéressante. Ainsi, montrer la simplicité du diagramme sans utiliser aucune connaissance préalable de la théorie des représentations est le point de départ de la nouvelle approche de A. Okounkov et A. Vershik pour les groupes symétriques (voir [3, 30]). On dispose pour cela d'une caractérisation de la simplicité des règles de branchement qui fait seulement intervenir la structure des centralisateurs :

**Proposition 3.5.** *Soient une algèbre  $M$  semi-simple (sur  $\mathbb{C}$ ) et  $N$  une sous-algèbre semi-simple de  $M$ . Toute représentation irréductible de  $M$  se décompose en somme de représentations irréductibles de  $N$  et on a :*



*Les règles de branchement sont sans-multiplicité, ou simples, si et seulement si le centralisateur de  $N$  dans  $M$  (noté  $\mathcal{Z}_M(N)$ ) est commutatif.*

Rappelons que  $\mathcal{Z}_M(N)$  est l'ensemble des éléments de  $M$  qui commutent avec tous les éléments de  $N$ . C'est une sous-algèbre de  $M$ . En effet, si  $x$  et  $y$  commutent avec tous les éléments de  $N$ , alors il en est de même de  $xy$  et de  $\lambda x + \mu y$  avec  $\lambda$  et  $\mu$  dans  $\mathbb{C}$ .

*Preuve (voir aussi [30]) :*

Soit  $V$  une représentation irréductible de  $M$  de dimension  $n$ . Cette représentation par rapport à  $N$  se décompose en une somme de représentations irréductibles de  $N$ . Rappelons le lemme de Schur :

*Soient  $\rho : A \rightarrow \text{Mat}(n)$  et  $\rho' : A \rightarrow \text{Mat}(n')$  2 représentations irréductibles d'une algèbre  $A$  sur  $\mathbb{C}$ .*

*Soit  $X$  un opérateur d'entrelacement entre ces 2 représentations, c'est-à-dire tel que  $\rho(a)X = X\rho'(a)$  pour tout  $a \in A$ . On a alors :*

- *Si  $\rho$  et  $\rho'$  sont non-isomorphes, alors  $X = 0$ .*
- *si  $\rho$  et  $\rho'$  sont isomorphes, alors on les identifie et on a  $X = \lambda \cdot \text{Id}$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}$ .*

Supposons que les branchements de  $M$  dans  $N$  sont simples. Dans la représentation  $V$ , il existe une base telle que les images des éléments de  $N$  sont des matrices diagonales par blocs, de la forme :

$$\begin{pmatrix} (\dots) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & (\dots) \end{pmatrix} \quad (\text{les } 0 \text{ représentent des blocs nuls}).$$

Les blocs sont les images des éléments de  $N$  dans les représentations irréductibles de  $N$  intervenant dans la décomposition de  $V$ . Par hypothèse, ces représentations sont non-isomorphes 2 à 2. Par le lemme de Schur, les seuls éléments dans  $\text{End}(V) \cong \text{Mat}(n)$  qui commutent avec tous les éléments de  $N$  sont des matrices diagonales, où les valeurs sur la diagonale sont constantes dans chaque bloc. Donc les éléments de  $\mathcal{Z}_M(N)$  commutent entre eux car ils commutent entre eux dans toutes les représentations irréductibles.

Réciproquement, supposons que les branchements de  $N$  dans  $M$  ne sont pas simples. Il existe donc une représentation irréductible  $V$  de  $M$  dans laquelle intervient deux fois la même représentation de  $N$ . Dans cette représentation, en se restreignant à la partie correspondant à la somme de 2 fois la même représentation  $\rho$  de  $N$ , il existe une base telle qu'un élément quelconque  $x$  de  $N$  a pour image :

$$\begin{pmatrix} \rho(x) & 0 \\ 0 & \rho(x) \end{pmatrix}.$$

Par le lemme de Schur, les éléments de  $M$  qui commutent avec toutes les images d'éléments de  $N$  sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha \cdot \text{Id} & \beta \cdot \text{Id} \\ \gamma \cdot \text{Id} & \delta \cdot \text{Id} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}, \quad (7)$$

où  $\text{Id}$  est la matrice identité de la représentation  $N$ . Ils forment une algèbre isomorphe à  $\text{Mat}(2 \times 2)$  qui est non-commutative. Ainsi,  $\mathcal{Z}_M(N)$  n'est pas commutatif.  $\square$

Rappelons que pour une algèbre  $\mathfrak{A}$  semi-simple sur  $\mathbb{C}$ , on a  $\mathfrak{A} = \bigoplus_k \text{End}(V_k)$  où la somme directe porte sur les représentations irréductibles non-isomorphes de  $\mathfrak{A}$  (une algèbre semi-simple est une algèbre

multi-matricielle, *i.e.* qui se décompose en somme directe d'algèbres matricielles, voir [33]). Un élément de  $\mathfrak{A}$  peut donc être vu comme une matrice par blocs de taille  $\sum_k \dim(V_k)$ , où chaque bloc sur la diagonale est l'image de cet élément dans une représentation irréductible et les blocs hors de la diagonale sont nuls. Pour toute représentation irréductible  $V_k$  de  $\mathfrak{A}$ , notons  $p_k$  l'élément de  $\mathfrak{A}$  formé par la matrice identité dans le bloc correspondant à la représentation  $V_k$ , et par les matrices remplies de 0 dans les autres blocs. Cet élément est central et la multiplication (à gauche) par cet élément est un projecteur de  $\mathfrak{A}$  sur  $\text{End}(V_k)$  :  $p_k \mathfrak{A} = \text{End}(V_k)$  ; ainsi, on a  $\mathfrak{A} = \bigoplus_k p_k \mathfrak{A}$ . De plus, ces éléments engendrent le centre de  $\mathfrak{A}$ . Ils vérifient les relations  $p_i p_j = \delta_{ij} p_i$ . Fixons maintenant une base dans chaque  $V_k$ , ce qui donne une base pour l'écriture multi-matricielle d'un élément de  $\mathfrak{A}$  (notons que la forme des projecteurs  $p_i$  ne dépend pas du choix de cette base). L'ensemble des matrices diagonales dans cette base forment une sous-algèbre commutative maximale de  $\mathfrak{A}$ . On va noter une telle algèbre  $\mathcal{D}_{\mathfrak{A}}$  (elle dépend des bases choisies).

Maintenant, reprenons  $M$  et  $N$  comme dans la proposition précédente. Ecrivons :

$$M = \bigoplus_{i=1}^{x_M} \text{End}(W_i) = \bigoplus_{i=1}^{x_M} m_i M, \quad \text{et} \quad N = \bigoplus_{\alpha=1}^{x_N} \text{End}(U_{\alpha}) = \bigoplus_{\alpha=1}^{x_N} n_{\alpha} N,$$

où les sommes directes portent sur les représentations irréductibles non-isomorphes de  $M$ , respectivement de  $N$  ;  $x_M$ , respectivement  $x_N$ , est le nombre de représentations irréductibles non-isomorphes de  $M$ , respectivement de  $N$ , et  $m_i$ , respectivement  $n_{\alpha}$ , est le projecteur central associé à  $W_i$ , respectivement  $U_{\alpha}$ , comme défini plus haut. Notons  $d_i$  la dimension de  $W_i$  et  $d_{\alpha}$  la dimension de  $U_{\alpha}$ . Soit  $\mu_{\alpha i}$  la multiplicité de  $U_{\alpha}$  dans la décomposition de  $W_i$  en somme de représentations irréductibles de  $N$ . La donnée des  $\mu_{\alpha i}$  est la donnée des règles de branchement de  $M$  dans  $N$  et on a  $d_i = \sum_{\alpha} \mu_{\alpha i} d_{\alpha}$ . Notons  $\mathcal{D}_N$  la sous-algèbre commutative maximale de  $N$  constituée des matrices diagonales dans une base quelconque. Choisissons une base de  $M$  telle que chaque bloc  $m_i M$  de l'écriture multi-matricielle de  $M$  se décompose en sous-blocs lorsque l'on se restreint à  $N$ , ces sous-blocs correspondant aux représentations irréductibles de  $N$  (celles qui interviennent dans la décomposition de  $m_i M$ ). Notons  $\mathcal{D}_M$  la sous-algèbre commutative maximale de  $M$  constituée des matrices diagonales dans cette base, et  $\mathcal{Z}_M$  le centre de  $M$ . Le centre  $\mathcal{Z}_M$  est engendré par les projecteurs  $m_i$ . On calcule en fonction des multiplicités les dimensions suivantes :

$$\dim(\mathcal{D}_M) = \sum_{i=1}^{x_M} d_i = \sum_{i=1}^{x_M} \sum_{\alpha=1}^{x_N} \mu_{\alpha i} d_{\alpha}. \quad (8)$$

$$\dim(\langle \mathcal{D}_N \cup \mathcal{Z}_M \rangle) = \sum_{i=1}^{x_M} \dim(m_i \mathcal{D}_N) = \sum_{i=1}^{x_M} \sum_{\substack{\alpha \text{ tels que} \\ \mu_{\alpha i} \neq 0}} d_{\alpha}, \quad (9)$$

où  $\langle \mathcal{D}_N \cup \mathcal{Z}_M \rangle$  est la sous-algèbre de  $M$  engendrée par l'union de l'algèbre  $\mathcal{D}_N$  et du centre  $\mathcal{Z}_M$  de  $M$ . En effet, la première égalité de (9) vient de :

$$\langle \mathcal{D}_N \cup \mathcal{Z}_M \rangle = \bigoplus_i m_i \mathcal{D}_N. \quad (10)$$

Ensuite, pour  $\alpha$  tel que  $\mu_{\alpha i} \neq 0$  on a, dans  $m_i \mathcal{D}_N$ , les éléments de  $M$  dont le sous-bloc correspondant à la représentation  $U_\alpha$  dans la représentation  $W_i$  est de la forme suivante (les autres sous-blocs sont nuls) :

$$\begin{pmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & D \end{pmatrix}, \quad (11)$$

où  $D \in n_\alpha \mathcal{D}_N$  sont des matrices carrées diagonales de taille  $d_\alpha$ , et il y a  $\mu_{\alpha i}$  blocs  $D$ . Donc pour chaque  $\alpha$  tel que  $\mu_{\alpha i} \neq 0$ , il y a une contribution à la dimension de  $m_i \mathcal{D}_N$  égale à  $d_\alpha$ .

En comparant les formules (8) et (9), on voit que les dimensions sont égales si et seulement si les multiplicités  $\mu_{\alpha i}$  sont 0 ou 1. Comme de plus,  $\langle \mathcal{D}_N \cup \mathcal{Z}_M \rangle$  est contenue dans  $\mathcal{D}_M$ , ces 2 algèbres coïncident si et seulement si les multiplicités  $\mu_{\alpha i}$  sont 0 ou 1.

**Proposition 3.6.** *Soit une chaîne d'algèbres semi-simples  $\mathfrak{A}_0 = \mathbb{C} \subset \mathfrak{A}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{A}_n \subset \dots$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *La sous-algèbre engendrée par l'union des centres des  $\mathfrak{A}_i$  pour  $i = 1, \dots, n$  (ce qui est appelée l'algèbre de Gelfand-Tsetlin, voir sous-section suivante) est une sous-algèbre commutative maximale de  $\mathfrak{A}_n$ .*
- (ii) *Les règles de branchement pour la chaîne  $\mathfrak{A}_0 = \mathbb{C} \subset \mathfrak{A}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{A}_n$  sont sans multiplicité.*
- (iii) *La sous-algèbre engendrée par l'union des centres des  $\mathfrak{A}_i$  pour  $i = 1, \dots, n$  coïncide avec la sous-algèbre engendrée par l'union des centralisateurs de  $\mathfrak{A}_{i-1}$  dans  $\mathfrak{A}_i$  pour  $i = 2, \dots, n$ .*

*Preuve :* L'équivalence entre (i) et (ii) est obtenue par récurrence d'après la discussion ci-dessus.

Ensuite l'équivalence entre (ii) et (iii) est une conséquence de l'équivalence entre (i) et (ii) et de la Proposition 3.5. En effet, tout d'abord (ii) implique (iii) car si les règles de branchement sont simples, alors d'après la Proposition 3.5, la sous-algèbre engendrée par l'union des centralisateurs est commutative. De plus, elle contient la sous-algèbre engendrée par l'union des centres qui est une sous-algèbre commutative maximale d'après la première partie de la proposition. Donc, ces 2 sous-algèbres coïncident.

Enfin, (iii) implique (ii), car si la sous-algèbre engendrée par l'union des centralisateurs est égale à celle engendrée par l'union des centres, alors elle est commutative, et donc les centralisateurs sont tous commutatifs. D'après la Proposition 3.5, cela implique que les règles de branchement sont sans multiplicité.  $\square$

**Remarque :** Dans la démonstration de la Proposition 3.5, nous avons considéré le cas de 2 représentations irréductibles isomorphes de  $N$  intervenant dans la décomposition d'une représentations irréductible de  $M$ . Dans la nouvelle terminologie, cela correspond à  $\mu_{\alpha i} = 2$  pour certains  $\alpha$  et  $i$ . Nous avons vu que cette situation implique la présence d'un terme isomorphe à  $Mat(2)$  dans la décomposition en somme directe du centralisateur  $\mathcal{Z}_M(N)$ . Plus généralement, dans le cas d'un  $\mu_{\alpha i} \neq 0$ , le terme dans la somme directe est isomorphe à  $Mat(\mu_{\alpha i})$ . On obtient donc :

$$\mathcal{Z}_M(N) \cong \bigoplus_{i, \alpha \text{ tels que } \mu_{\alpha i} \neq 0} Mat(\mu_{\alpha i}).$$

On calcule en fonction des multiplicités la dimension suivante :

$$\dim(\langle \mathcal{D}_N \cup \mathcal{Z}_M(N) \rangle) = \sum_{i=1}^{x_M} \sum_{\alpha=1}^{x_N} \mu_{\alpha i}^2 d_{\alpha}, \quad (12)$$

où  $\langle \mathcal{D}_N \cup \mathcal{Z}_M(N) \rangle$  est la sous-algèbre de  $M$  engendrée par l'union de  $\mathcal{D}_N$  et du centralisateur  $\mathcal{Z}_M(N)$  de  $N$  dans  $M$ . En effet, on a que  $\langle \mathcal{D}_N \cup \mathcal{Z}_M(N) \rangle$  est la somme directe des sous-algèbres suivantes :

$$\langle \mathcal{D}_N \cup \mathcal{Z}_M(N) \rangle = \bigoplus_{i, \alpha \text{ tels que } \mu_{\alpha i} \neq 0} n_{\alpha} \mathcal{D}_N \otimes \text{Mat}(\mu_{\alpha i}). \quad (13)$$

C'est l'analogie ici de la somme directe (10) : pour chaque  $i$  et  $\alpha$  tels que  $\mu_{\alpha i} \neq 0$ ,  $n_{\alpha} \mathcal{D}_N \otimes \text{Mat}(\mu_{\alpha i})$  est la sous-algèbre formée par le produit des éléments de la forme (11) avec les éléments de la forme (les analogues pour  $\mu_{\alpha i} > 2$  des éléments (7)) :

$$\begin{pmatrix} c_1^1 \cdot \text{Id} & \dots & c_{\mu_{\alpha i}}^1 \cdot \text{Id} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^{\mu_{\alpha i}} \cdot \text{Id} & \dots & c_{\mu_{\alpha i}}^{\mu_{\alpha i}} \cdot \text{Id} \end{pmatrix} \quad \text{avec } c_k^l \in \mathbb{C} \text{ pour } k, l \in \{1, \dots, \mu_{\alpha i}\}, \quad (14)$$

où  $\text{Id}$  est la matrice identité de taille  $d_{\alpha}$ . Pour  $i$  et  $\alpha$  tels que  $\mu_{\alpha i} \neq 0$ , la dimension de cette sous-algèbre est  $\mu_{\alpha i}^2 d_{\alpha}$ , ce qui donne la formule (12).

En utilisant (12) avec les formules (8) et (9), on obtient à nouveau l'équivalence entre les 3 assertions de la proposition précédente. En fait, on a les inégalités  $\dim(\langle \mathcal{D}_N \cup \mathcal{Z}_M \rangle) \leq \dim(\mathcal{D}_M) \leq \dim(\langle \mathcal{D}_N \cup \mathcal{Z}_M(N) \rangle)$  et de plus si les branchements sont sans-multiplicité, il y a égalité entre les 3 termes, et si les branchements ne sont pas sans-multiplicité, les inégalités sont strictes.

### 3.3 Base de Gelfand-Tsetlin et algèbre de Gelfand-Tsetlin

#### 3.3.1 Construction dans le cas d'un diagramme simple

Dans un premier temps, nous rappelons la construction de la base canonique, appelée base de Gelfand-Tsetlin dans [3], d'une chaîne d'algèbres semi-simples dans le cas où son diagramme de Bratteli est sans multiplicité. C'est simplement la base utilisée dans la sous-section précédente pour la discussion des sous-algèbres commutatives maximales, dans le cas des multiplicités  $\mu_{\alpha i}$  égales à 0 ou 1.

Plaçons-nous à l'étage  $n+1$ , c'est-à-dire dans  $\mathfrak{A}_n$ . Soit  $V$  une représentation irréductible de  $\mathfrak{A}_n$ , et soient  $V_{n-1}^1, \dots, V_{n-1}^r$  les représentations irréductibles non-isomorphes de  $\mathfrak{A}_{n-1}$  telles que, en tant que représentation de  $\mathfrak{A}_{n-1}$ ,  $V$  s'écrive :

$$V = \bigoplus_{i=1}^r V_{n-1}^i.$$

Les coefficients sont 1 par hypothèse. On reproduit la même chose pour chaque  $V_{n-1}^i$  jusqu'à ce que l'on arrive à la représentation de  $\mathfrak{A}_0 = \mathbb{K}$ , c'est la représentation triviale unidimensionnelle notée  $V_0$ . On voit donc  $V$  comme une somme directe d'espaces uni-dimensionnels, et chacun de ces espaces définit un vecteur à une constante multiplicative près. On obtient ainsi une base canonique (dans le sens où elle

est définie à un changement diagonal de base près) de  $V$ , et chaque vecteur de cette base est labellisé par un trajet  $T$  sur le diagramme qui va de  $V_0$  à  $V$  :

$$T = V_0 \nearrow V_1 \nearrow \cdots \nearrow V_{n-1} \nearrow V \quad \text{où } V_i \nearrow V_{i+1} \Leftrightarrow V_i \text{ intervient dans la décomposition de } V_{i+1}.$$

A chaque trajet  $T$  ci-dessus correspond un vecteur de base  $v_T$ . On reproduit le même raisonnement pour chaque représentation irréductible de  $\mathfrak{A}_n$ .

Ce qui est appelée la base de Gelfand-Tsetlin  $\{v_T\}$  est obtenue en "collant" les bases obtenues pour chaque représentation. Les  $v_T$  sont tous définis à une constante multiplicative près.

La sous-algèbre des matrices diagonales dans la base de Gelfand-Tsetlin est identifiée avec l'algèbre engendrée par l'union des centres des  $\mathfrak{A}_i$  pour  $i \leq n$ , qui est appelée l'algèbre de Gelfand-Tsetlin dans [3]. Sa dimension est la somme des dimensions des représentations de  $\mathfrak{A}_n$ . C'est une sous-algèbre commutative maximale de  $\mathfrak{A}_n$  lorsque le diagramme de Bratteli est simple.

Ainsi, dans le cas d'un diagramme simple, un vecteur de la base de Gelfand-Tsetlin  $v_T$  est caractérisé par son "poids"  $\alpha(v_T)$  (voir section 2.2 pour le cas des groupes symétriques), qui est défini comme l'ensemble des valeurs propres correspondant à  $v_T$  pour un ensemble de générateurs de l'algèbre de Gelfand-Tsetlin. En d'autres termes, un vecteur  $v_T$  est caractérisé soit par le trajet  $T$  dans le diagramme de Bratteli, soit par une "ligne" de valeurs propres  $\alpha(v_T)$  pour un ensemble de générateurs de l'algèbre de Gelfand-Tsetlin ; de plus, l'étage  $V_i$  pour  $i \leq n$  du trajet  $T$  correspond à l'étage  $i$  du poids  $\alpha(v_T)$  qui est constitué des valeurs propres des générateurs appartenant à  $\mathfrak{A}_i$  mais pas à  $\mathfrak{A}_{i-1}$  de l'algèbre de Gelfand-Tsetlin.

Dans le cas d'une tour d'algèbres semi-simples définie par la donnée de :

$$\mathfrak{A} = \langle x_1, \dots, x_n, \dots \mid \{R\} \rangle \quad (15)$$

pour laquelle les branchements sont simples, la base de Gelfand-Tsetlin a la propriété suivante :

**Proposition 3.7.** *Supposons que la tour d'algèbres (15) est locale de profondeur  $k_0$  (cf sous-section 3.1).*

*Alors l'action de  $x_k$  pour  $k = 1, \dots, n$  sur les vecteurs  $v_T$  de la base de Gelfand-Tsetlin de l'étage  $n$  est locale dans le sens où elle n'affecte que les niveaux  $k - k_0, \dots, k$  du trajet  $T$ . C'est-à-dire que si l'on note  $T = V_0 \nearrow V_1^T \nearrow \cdots \nearrow V_n^T$ , alors  $x_k \cdot v_T$  est une combinaison linéaire des  $v_{T'}$  où les  $T'$  sont tels que  $V_i^{T'} = V_i^T$  pour tout  $i$  différent de  $k - k_0, \dots, k$ . En terme de poids,  $x_k \cdot v_T$  est une combinaison linéaire des  $v_{T'}$  où  $\alpha(v_{T'})$  diffère de  $\alpha(v_T)$  seulement aux étages  $k - k_0, \dots, k$ .*

Preuve :

Nous allons raisonner en termes de poids. Soit  $v_T$  un vecteur de la base de Gelfand-Tsetlin de poids  $\alpha(v_T)$ . Considérons l'action de  $x_k$  pour  $k \leq n$  sur  $v_T$ .

- Les étages  $i > k$  du poids  $\alpha(v_T)$  sont constitués de valeurs propres d'éléments appartenant aux centres des  $\mathfrak{A}_i$  pour  $i > k$ . Ces éléments commutent donc avec  $x_k$ , ce qui fait que l'action de  $x_k$  sur  $v_T$  ne modifie pas les étages  $i > k$  du poids (et ce indépendamment de la propriété de localité).
- Par définition de la profondeur,  $x_k$  commute avec tous les éléments de  $\mathfrak{A}_i$  pour  $i < k - k_0$  donc l'action de  $x_k$  sur  $v_T$  ne change pas les étages  $i < k - k_0$  du poids car ce sont des valeurs propres d'éléments qui commutent avec  $x_k$ .

En conclusion, les seuls étages du poids  $\alpha(v_T)$  (ou de manière équivalente du trajet  $T$ ) pouvant être affectés par  $x_k$  sont les étages  $k - k_0, \dots, k$ .  $\square$

**Remarques :**

- Dans le cas où la profondeur est de 0 (tours d'algèbres commutatives), alors l'action de  $x_k$  sur  $v_T$  n'affecte que le niveau  $k$  du trajet  $T$ .
- Dans le cas où la profondeur est de 1, l'action de  $x_k$  sur  $v_T$  n'affecte que les niveaux  $k - 1$  et  $k$  du trajet  $T$ .
- D'après la Proposition 3.6, dans le cas de branchements simples, l'algèbre de Gelfand-Tsetlin qui est définie comme l'algèbre engendrée par l'union des centres est égale à l'algèbre engendrée par l'union des centralisateurs. Ainsi, le poids d'un vecteur de la base de Gelfand-Tsetlin peut être considéré par rapport à un ensemble de générateurs appartenant aux centralisateurs.

### 3.3.2 Exemples de bases de Gelfand-Tsetlin

Dans le cas de la tour des groupes symétriques, chaque représentation irréductible de  $S_n$  correspond à un diagramme de Young associé à une partition de  $n$ . Les règles de branchement sont les suivantes :

Soit  $V^{\lambda_n}$  la représentation irréductible de  $S_n$  associée à la partition  $\lambda_n$  de  $n$ . Soit  $V^{\lambda_{n-1}}$  la représentation irréductible de  $S_{n-1}$  associée à la partition  $\lambda_{n-1}$  de  $n - 1$ . Sachant que dans un tableau de Young, la longueur des lignes doit aller en décroissant (non-strictement) lorsque l'on descend, on définit une relation d'ordre partielle sur les partitions comme suit :

$\lambda_{n-1} \nearrow \lambda_n \Leftrightarrow$  on peut obtenir le tableau associé à  $\lambda_n$  à partir de celui associé à  $\lambda_{n-1}$  en rajoutant une case.

Maintenant, les règles de branchement s'expriment simplement comme :  $V^{\lambda_{n-1}}$  et  $V^{\lambda_n}$  sont reliées si et seulement si  $\lambda_{n-1} \nearrow \lambda_n$ .

Pour les groupes symétriques, les vecteurs de la base de Gelfand-Tsetlin de  $\mathbb{C}[S_n]$  sont labellisés par les trajets  $T = V_0 \nearrow V_1 \nearrow V_{\lambda_2} \cdots \nearrow V_{\lambda_n}$  où  $\forall i = 0, \dots, n - 1$ ,  $\lambda_i \nearrow \lambda_{i+1}$ . De plus, d'après la proposition ci-dessus, en faisant attention au fait qu'ici  $S_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1} \rangle$ , on a pour  $k \leq n - 1$  que :

$$s_k \cdot v_T \text{ est égal à une combinaison linéaire de } v_{T'} \text{ où } \lambda'_i = \lambda_i, \quad \forall i \neq k, k + 1.$$

En fait, historiquement, les bases de Gelfand-Tsetlin ont été introduites dans les années 50 pour les algèbres de Lie semi-simples (voir [34], [35]). On rappelle ici le résultat pour la chaîne d'algèbres de Lie semi-simples des  $\mathfrak{gl}_n$  à titre d'exemple pour bien voir les similitudes que l'on trouve avec le cas des groupes finis de permutation traités auparavant. Les résultats pour les autres algèbres de Lie classiques sont dans [36].

Les  $\mathfrak{gl}_n$  forment une chaîne d'algèbres de Lie semi-simples. En terme de générateurs et relations, elles sont définies par :

$$\mathfrak{gl}_n = \langle E_i^j, \quad i, j = 1, \dots, n \mid [E_i^j, E_k^l] = \delta_k^j E_i^l - \delta_i^l E_k^j \rangle,$$

(dans la représentation fondamentale,  $E_i^j$  est la matrice constituée de 0 partout et d'un 1 sur la ligne  $i$  de la colonne  $j$ ). La sous-algèbre  $\mathfrak{gl}_{n-1}$  est la sous-algèbre engendrée par  $E_i^j$  pour  $i, j = 1, \dots, n - 1$ . il est connu que les représentations irréductibles de dimension finie de  $\mathfrak{gl}_n$  sont en bijection avec l'ensemble des  $n$ -uplets de nombres complexes suivants :

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n), \quad \text{tel que } \gamma_i - \gamma_{i+1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad \forall i = 1, \dots, n - 1.$$

Notons  $V_n^\gamma$  la représentation irréductible de  $\mathfrak{gl}_n$  associée à un n-uplet  $\gamma$ . On a les règles de branchement suivantes :

**Théorème 3.8.** *Les branchements de  $\mathfrak{gl}_{n-1}$  dans  $\mathfrak{gl}_n$  sont sans multiplicité.*

*De plus,  $V_{n-1}^\mu$  apparaît dans la décomposition de  $V_n^\gamma$  si et seulement si  $\gamma_i - \mu_i \in \mathbb{Z}_+$  et  $\mu_i - \gamma_{i+1} \in \mathbb{Z}_+$  pour tout  $i = 1, \dots, n-1$ .*

Les règles de branchement sont simples donc on peut construire la base de Gelfand-Tsetlin pour la chaîne des  $\mathfrak{gl}_n$  comme décrit à la sous-section précédente. De plus, on peut labelliser les vecteurs de cette base par des objets combinatoires appelés les "*Gelfand-Tsetlin patterns*" définis comme tels, un *Gelfand-Tsetlin pattern*  $\Gamma$  associé à un n-uplet  $\gamma$  est :

$$\begin{array}{ccccccc} \gamma_{n1} & & \gamma_{n2} & & \dots & & \dots & & \gamma_{nn} \\ & \gamma_{n-1,1} & & \dots & & \dots & & \gamma_{n-1,n-1} \\ & & \ddots & & \dots & & \ddots & \\ & & & \gamma_{21} & & \gamma_{22} & & \\ & & & & \gamma_{11} & & & \end{array}$$

où la ligne du haut correspond à  $\gamma$  et les conditions suivantes (qui sont les règles de branchement) sont vérifiées :  $\gamma_{ki} - \gamma_{k-1,i} \in \mathbb{Z}_+$ , et  $\gamma_{k-1,i} - \gamma_{k,i+1} \in \mathbb{Z}_+$  pour tout  $i = 1, \dots, k-1$ .

### 3.3.3 Généralisation de la base de Gelfand-Tsetlin lorsque le diagramme n'est pas simple

On peut généraliser la notion de base de Gelfand-Tsetlin aux cas où le diagramme de Bratteli n'est pas simple. C'est la base utilisée lors de la discussion précédant la Proposition 3.6. Maintenant,  $V = \bigoplus_{i=1}^r \gamma_i V_{n-1}^i$  où  $\gamma_i$  est la multiplicité de  $V_{n-1}^i$  dans  $V$ . Ainsi, une base de  $V$  est trouvée en prenant une base de  $V_{n-1}^i$  pour chaque  $i$  mais en faisant le produit tensoriel avec  $\mathbb{C}^{\gamma_i}$ . En effet, on peut écrire  $V = \bigoplus_{i=1}^r (V_{n-1}^i \otimes \mathbb{C}^{\gamma_i})$ . Et donc, soit  $\{f_k\}$  une base de  $\mathbb{C}^{\gamma_k}$ , on a une base de  $V$  qui est constituée des vecteurs  $e_s^i \otimes f_j$  où  $\{e_s^i\}$  est une base de  $V_{n-1}^i$  et  $j = 1, \dots, \gamma_i$ .

On répète la procédure pour  $V_{n-1}^i$  jusqu'à  $V_0$  et on aboutit à une base de Gelfand-Tsetlin  $\{e_T \otimes f_j\}$  où  $e_T$  est labellisé par le trajet suivi sans faire la différence entre deux segments joignant les mêmes points, et les  $f_j$  servant justement à faire cette différence. Les  $f_j$  sont définis comme base de  $\mathbb{C}^{n_T}$  où  $n_T$  dépend de  $e_T$  :  $n_T$  est égal au produit de toutes les multiplicités rencontrées en suivant le trajet  $T$ .

Finalement, les vecteurs  $e_T \otimes f_j$  ne sont plus définis à un scalaire près, mais à un changement de base de  $\mathbb{C}^{n_T}$  près, c'est-à-dire à une transformation de  $GL(n_T, \mathbb{C})$  près.

## 4 Codes génétiques de $A_n$

Nous allons présenter différents codes génétiques possibles du groupe alterné, et pour chacun nous allons le faire selon le modèle de la section 2.1 pour le groupe symétrique. A chaque fois, nous réaliserons l'algorithme de Coxeter-Todd et donnerons une forme normale. Le premier code étudié a été utilisé par H. Mitsuhashi qui en a trouvé un  $q$ -analogue ([37]). C'est le code de Moore (voir [25]). Le deuxième est le code de Carmichael (voir [25]). Et enfin, le troisième est un nouveau code génétique : il munit la chaîne des groupes alternés d'une structure de tour locale et stationnaire. Ce code est très semblable à

un code trouvé par Versik et Vserminov dans [26] (comparer (20) et (21)). Néanmoins nous en donnons ici une forme normale différente.

Dans toutes les figures d'algorithmes de Coxeter-Todd ci-dessous, nous omettrons les boucles au-dessus d'une classe signifiant qu'un générateur laisse cette classe invariante : lorsque l'action d'un générateur sur une classe n'est pas précisée, cela signifie qu'elle est invariante par ce générateur.

#### 4.1 Code de Moore

Considérons le groupe  $H_n$  engendré par  $\langle a_1, \dots, a_{n-2} \rangle$  avec les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_1^3 = 1, \\ a_i^2 = 1 & \text{si } i > 1, \\ (a_i a_{i+1})^3 = 1, \\ (a_i a_j)^2 = 1 & \text{si } |i - j| > 1. \end{array} \right. \quad (16)$$

Ces relations impliquent immédiatement :

$$\begin{aligned} a_1^{-1} &= a_1^2, \\ a_i^{-1} &= a_i & \text{si } i > 1, \\ a_i a_{i+1} &= a_{i+1}^{-1} a_i^{-1} a_{i+1}^{-1} a_i^{-1}, \\ a_i a_j &= a_j^{-1} a_i^{-1} & \text{si } |i - j| > 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Et donc notamment :

$$a_i a_j = a_j a_i \quad \text{si } |i - j| > 1, i \neq 1, \text{ et } j \neq 1 \quad \text{et} \quad a_1 a_i = a_i a_1^{-1} \quad \text{pour } i > 2. \quad (18)$$

Il existe un morphisme de groupe de  $H_n$  dans  $A_n$  tel que

$$a_i \mapsto (1, 2)(i+1, i+2).$$

En effet, les éléments  $(1, 2)(i+1, i+2)$  vérifient le code (16) qui a été choisi dans ce but. De plus, tous les éléments de  $A_n$  sont générés par les éléments de la forme  $(1, 2)(i+1, i+2)$  pour  $i \in \{1, \dots, n-2\}$ , donc ce morphisme est surjectif et donc  $|H_n| \geq n!/2$ .

Réalisons l'algorithme de Coxeter-Todd avec le sous-groupe  $H$  de  $H_n$  engendré par les éléments  $a_1, \dots, a_{n-3}$ .

Le seul élément qui ne laisse pas la classe  $H$  invariante est  $a_{n-2}$ , on obtient donc la classe  $a_{n-2}H$ . De manière générale, pour la classe  $a_k a_{k+1} \dots a_{n-2}H$  pour  $k \in \{2, \dots, n-2\}$  on a en utilisant les relations (18) :

– Pour  $i < k-1$ ,

$$\begin{aligned} a_i \cdot a_k \dots a_{n-2}H &= a_k \dots a_{n-2} a_i^{\pm 1} H \\ &= a_k \dots a_{n-2} H, \end{aligned}$$

le  $\pm 1$  dépendant de la parité du nombre de  $a_j$  traversé par  $a_i$  pour  $i = 1$  (sinon  $a_i^{-1} = a_i$ ).

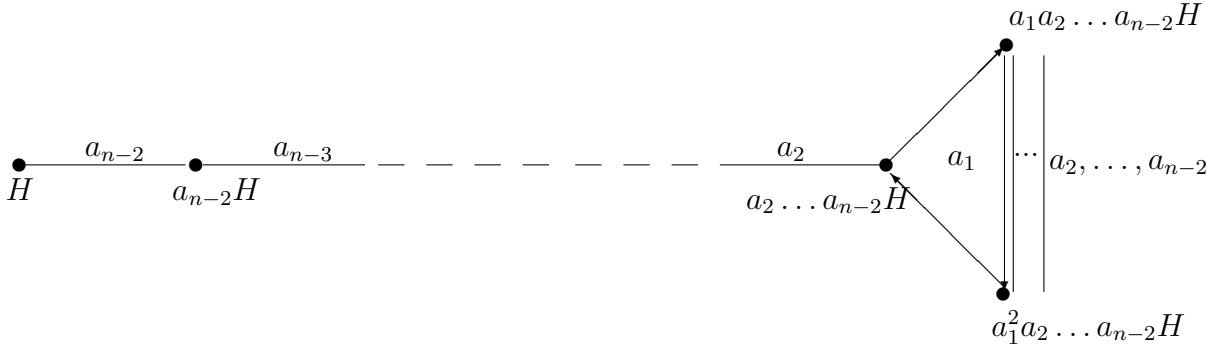
– Pour  $i > k$  (en particulier on a  $i > 2$  et donc  $a_{i-1}^{-1} = a_{i-1}$  et  $a_i^{-1} = a_i$ ),

$$\begin{aligned} a_i \cdot a_k \dots a_{n-2}H &= a_k \dots a_i a_{i-1} a_i \dots a_{n-2}H && \text{car } a_i^{-1} = a_i \\ &= a_k \dots a_{i-1} a_i a_{i-1} a_{i+1} \dots a_{n-2}H && \text{car } a_i a_{i-1} a_i = a_{i-1} a_i a_{i-1} \\ &= a_k \dots a_{i-1} a_i a_{i+1} \dots a_{n-2} a_{i-1} H && \text{car } a_{i-1} \text{ commute avec } a_{i+1}, \dots, a_{n-2} \\ &= a_k \dots a_{n-2} H. \end{aligned}$$



On obtient donc à chaque fois une nouvelle classe de la forme  $a_{k-1}a_k \dots a_{n-2}H$ , jusqu'à ce que l'on arrive à  $a_1$  où l'on obtient un triangle orienté car c'est un générateur d'ordre trois. On termine l'algorithme en analysant la classe  $a_1 \dots a_{n-2}H$  :

$$\begin{aligned}
a_i \cdot a_1 \dots a_{n-2}H &= a_1^2 a_2 \dots a_i a_{i-1} a_i \dots a_{n-2}H && \text{pour } i > 2, \\
&= a_1^2 a_2 \dots a_{n-2}H, && \text{(cf calcul plus haut),} \\
a_2 \cdot a_1 a_2 \dots a_{n-2}H &= a_1^{-1} a_2 a_1^{-1} a_3 \dots a_{n-2}H \\
&= a_1^2 a_2 a_3 \dots a_{n-2} a_1^{\pm 1} H && \text{car } a_1^2 a_k = a_k a_1 \text{ pour } k \geq 3, \\
&= a_1^2 a_2 a_3 \dots a_{n-2} H.
\end{aligned}$$



**Fig. 4 :** l'algorithme de Coxeter-Todd pour le code de Moore (17) avec  $(H_n, H)$ .

On compte donc sur la figure  $n$  classes différentes. Raisonnons maintenant par récurrence :

- il est clair que  $H_3 \cong C_3 \cong A_3$ , c'est le groupe cyclique à trois éléments.
- supposons que  $H_{n-1} \cong A_{n-1}$ , alors son image dans  $H_n$  est un quotient de  $A_{n-1}$  (cf remarque (2.1), alors d'après l'algorithme ci-dessus on a :

$$|H_n| \leq n|H| \leq n|A_{n-1}| = n \frac{(n-1)!}{2} = |A_n|$$

- en conclusion,  $H_n$  est isomorphe à  $A_n$  car il existe un morphisme surjectif de  $H_n$  dans  $A_n$ , et de plus  $|H_n| \leq |A_n|$ . Et donc le code (16) est bien un code génétique de  $A_n$ .

De plus, on en déduit une forme normale par récurrence pour un élément quelconque de  $A_n$ . En effet, soit  $e$  l'élément neutre et soit  $R_k := \{e, a_{k-2}, a_{k-3}a_{k-2}, \dots, a_1 a_2 \dots a_{k-2}, a_1^2 a_2 \dots a_{k-2}\}$  alors on a que :

**Proposition 4.1.** *Soit  $x \in A_n$  avec  $n \geq 3$ , alors  $x$  s'écrit de façon unique comme  $x = u_n u_{n-1} \dots u_3$  où  $u_k \in R_k$  pour tout  $k = 3, \dots, n$ .*

Enfin, on remarque que ce code génétique ne donne pas une structure de tour locale et stationnaire à la chaîne des groupes  $A_n$ , car le générateur  $a_1$  joue un rôle particulier par rapport aux autres. Il ne commute avec aucun des autres  $a_i$  et il est d'ordre 3 tandis que les autres sont d'ordre 2. En fait, si l'on ne regarde pas  $a_1$ , la tour devient locale et stationnaire. Cela se voit sur l'algorithme, on peut *tronquer* la figure sur la gauche pour retrouver la même avec  $p \leq n$  mais pas sur la droite. Mais, globalement, à cause du statut particulier de  $a_1$ , la chaîne des groupes alternés ne forment pas une tour de groupes locale et stationnaire avec ce code.

## 4.2 Le code de Carmichael

Considérons le groupe  $H_n$  engendré par  $a_1, \dots, a_{n-2}$  et les relations :

$$\begin{cases} a_i^3 = 1, \\ (a_i a_j)^2 = 1 \quad \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (19)$$

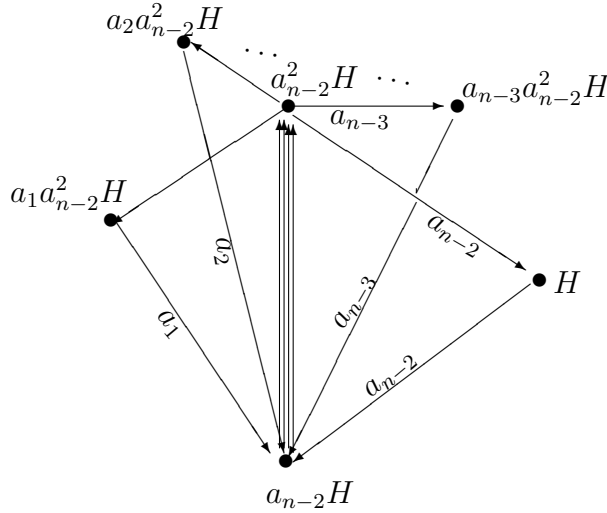
Ce code implique que  $a_i a_j = a_j^2 a_i^2$  pour tout  $i, j$  tels que  $i \neq j$ . Maintenant le morphisme surjectif de  $H_n$  dans  $A_n$  est :

$$a_i \mapsto (1, 2, i+2).$$

Pour réaliser l'algorithme de Coxeter-Todd ici, on prend  $H$  le sous-groupe engendré par  $a_1, \dots, a_{n-3}$ , et on trace tout d'abord le premier triangle orienté  $H, a_{n-2}H, a_{n-2}^2H$ , ensuite on remarque que :

$$a_i \cdot a_{n-2}H = a_{n-2}^2 a_i^2 H = a_{n-2}^2 H \quad \text{pour tout } i \neq n-2.$$

Donc tous les générateurs envoient  $a_{n-2}H$  à  $a_{n-2}^2H$ . Ensuite, soit  $i \in \{1, \dots, n-3\}$ , on trace le triangle  $a_{n-2}H, a_{n-2}^2H, a_i a_{n-2}^2H$ .



**Fig. 5 :** l'algorithme de Coxeter-Todd pour le code de Carmichael (20) avec  $(H_n, H)$ .

De manière générale, pour  $j, i$  tels que  $i \neq n-2$ ,  $j \neq n-2$  et  $i \neq j$ , on a :

$$\begin{aligned} a_j \cdot a_i a_{n-2}^2 H &= a_i^2 a_j^2 a_{n-2}^2 H \\ &= a_i^2 a_{n-2}^2 H && \text{car } a_{n-2}^2 a_j^2 a_{n-2}^2 = a_j, \\ &= a_i a_{n-2}^2 H && \text{car } a_i a_{n-2}^2 H = a_{n-2}^2 H. \end{aligned}$$

Enfin, on a pour  $i \neq n-2$  :

$$\begin{aligned} a_{n-2} \cdot a_i a_{n-2}^2 H &= a_i^2 a_{n-2}^2 H \\ &= a_i a_{n-2}^2 H && \text{car } a_i a_{n-2}^2 H = a_{n-2}^2 H. \end{aligned}$$

On obtient une jolie figure (cf figure 5) en forme de livre, où la "reliure" est constituée des deux classes  $a_{n-2}H, a_{n-2}^2H$ , et où les "pages" sont triangulaires. On compte  $n - 2$  pages et donc avec la "reliure", il y a au plus  $n$  classes différentes. En utilisant le même raisonnement par récurrence que dans la sous-section précédente, on vérifie que le code (19) est bien un code génétique de  $A_n$ . L'avantage de ce code est sa simplicité (seulement deux relations), mais malheureusement il fait jouer un rôle tout particulier aux "points" 1 et 2 et il ne munit pas la chaîne des groupes alternés d'une structure de tour locale. Effectivement, on voit qu'aucun générateur ne commute avec un autre.

La forme normale sous-jacente à ce code est la suivante : soit  $e$  l'élément neutre, et pour  $k \in \mathbf{N}$  soit  $R_k = \{e, a_{k-2}, a_{k-2}^2, a_{k-3}a_{k-2}^2, \dots, a_1a_{k-2}^2\}$  on a :

**Proposition 4.2.** *Soit  $x \in A_n$  avec  $n \geq 3$ , alors  $x$  s'écrit de façon unique comme  $x = u_n u_{n-1} \dots u_3$  où  $u_k \in R_k$  pour tout  $k = 3, \dots, n$ .*

### 4.3 Nouveau code génétique

Considérons maintenant le groupe  $H_n$  engendré par  $a_1, \dots, a_{n-2}$  et les relations suivantes :

$$\begin{cases} a_i^3 = 1, \\ (a_i a_{i+1})^2 = 1, \\ (a_i a_{i+1} a_{i+2})^2 = 1, \\ a_i a_j = a_j a_i \end{cases} \quad \text{si } |i - j| > 2. \quad (20)$$

Cette fois-ci nous considérons le morphisme surjectif de  $H_n$  dans  $A_n$  suivant :

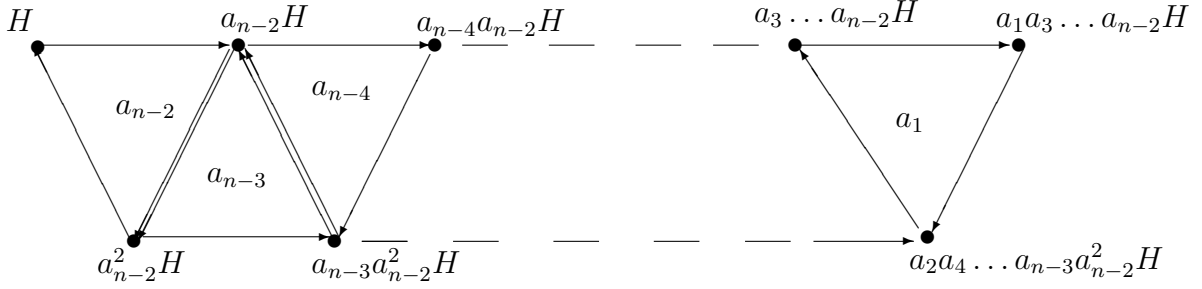
$$a_i \mapsto (i, i+1, i+2).$$

et appliquons l'algorithme de Coxeter-Todd en prenant comme sous-groupe  $H$ , le sous-groupe engendré par  $a_1, \dots, a_{n-3}$ , et en utilisant les relations (20). Ici, tous les éléments sont d'ordre trois, donc on n'aura que des triangles orientés dans la figure. On trace donc le premier triangle  $H, a_{n-2}H, a_{n-2}^2H$  et on analyse l'action des générateurs sur ces 2 dernières classes. L'action de  $a_1, \dots, a_{n-5}$  les laisse invariantes car ils commutent avec  $a_{n-2}$ . Ensuite, on a :

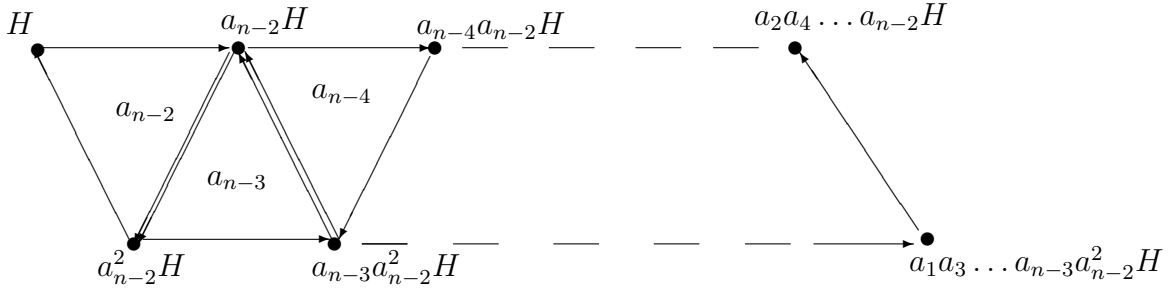
$$\begin{aligned} a_{n-3} \cdot a_{n-2}H &= a_{n-2}^2 a_{n-3}^2 H \\ &= a_{n-2}^2 H, \\ a_{n-4} \cdot a_{n-2}^2 H &= a_{n-2}^2 a_{n-3}^2 a_{n-4}^2 a_{n-2}^2 a_{n-3}^2 a_{n-2}^2 H \quad \text{d'après la relation 3 du code (20)} \\ &= a_{n-2}^2 a_{n-3}^2 a_{n-4}^2 a_{n-3} H \quad \text{d'après la relation 2 du code (20),} \\ &= a_{n-2}^2 H. \end{aligned}$$

On en déduit que  $a_{n-4}$  aussi laisse invariante la classe  $a_{n-2}^2 H$  et il apparaît donc au plus deux autres classes :  $a_{n-3}a_{n-2}^2 H = a_{n-3}^2 a_{n-2} H$ , et  $a_{n-4}a_{n-2} H$  (cf les figures 6 et 7). On réitère exactement ce genre de calcul jusqu'à ce que l'on arrive aux deux dernières classes sur les figures 6 et 7 qui sont :

- si  $n$  est impair,  $a_1 a_3 \dots a_{n-4} a_{n-2} H$  et  $a_2 a_4 \dots a_{n-3} a_{n-2}^2 H$  (figure 6).
- si  $n$  est pair,  $a_2 a_4 \dots a_{n-4} a_{n-2} H$  et  $a_1 a_3 \dots a_{n-3} a_{n-2}^2 H$  (figure 7).



**Fig. 6 :** l'algorithme de Coxeter-Todd pour le code (19) avec  $(H_n, H)$  (pour  $n$  impair).



**Fig. 7 :** l'algorithme de Coxeter-Todd pour le code (19) avec  $(H_n, H)$  (pour  $n$  pair).

*Remarque :* Pour illustrer l'utilité de l'algorithme, on peut vérifier la relation :

$$(a_i a_{i+2})^5 = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n-4\}.$$

Il faut vérifier que le trajet  $(a_i a_{i+2})^5$  en partant de chaque classe revient à elle-même. Ainsi, on montre que le code (20) implique cette relation.

On compte le nombre de classes, il y en a 3 dans le premier triangle et ensuite une de plus pour chaque générateur allant de  $a_{n-3}$  à  $a_1$ . Il y en a donc  $n$ . Par exactement le même raisonnement que dans les sous-sections précédentes, on en déduit que le code (20) est bien un code génétique de  $A_n$ .

On voit qu'avec ce code les relations entre générateurs ne dépendent pas de où l'on se trouve dans la tour des groupes alternés, et de plus, d'après la dernière relation de (20), les générateurs commutent s'ils sont séparés par au moins 2 étages dans la tour. Ce code munit donc la chaîne des groupes alternés d'une structure de tour locale et stationnaire de profondeur 2 (voir section précédente).

En ce qui concerne une forme normale donnée par cet algorithme, soit  $e$  l'élément neutre et soit :

- si  $k$  pair,  
 $R_k := \{e, a_{k-2}, a_{k-4}a_{k-2}, \dots, a_2a_4 \dots a_{k-4}a_{k-2}, a_{k-2}^2, a_{k-3}a_{k-2}^2, \dots, a_1a_3 \dots a_{k-3}a_{k-2}^2\}.$
- si  $k$  impair,  
 $R_k := \{e, a_{k-2}, a_{k-4}a_{k-2}, \dots, a_1a_3 \dots a_{k-4}a_{k-2}, a_{k-2}^2, a_{k-3}a_{k-2}^2, \dots, a_2a_4 \dots a_{k-3}a_{k-2}^2\}.$

**Proposition 4.3.** Soit  $x \in A_n$  pour  $n \geq 3$ , alors  $x$  s'écrit de façon unique comme  $x = u_n u_{n-1} \dots u_3$  où  $u_k \in R_k$  pour tout  $k = 3, \dots, n$ .

A titre de comparaison, le code donné dans [26] pour les groupes alternés est le suivant. Le groupe  $A_n$  est engendré par  $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}$  avec les relations suivantes :

$$\begin{cases} x_i^3 = 1, \\ (x_i x_{i+1})^2 = 1, \\ x_i x_{i+1}^2 x_{i+2} = x_{i+2} x_i, \\ x_i x_j = x_j x_i \end{cases} \quad \text{si } |i - j| > 2. \quad (21)$$

On voit que par rapport au code (20), seule la troisième relation est différente. On peut facilement montrer que ces codes sont équivalents. En effet, les générateurs  $a_1, \dots, a_{n-2}$  vérifiant les relations du code (20) satisfont à la relation  $a_i a_{i+1}^2 a_{i+2} = a_{i+2} a_i$  comme on peut le vérifier directement sur les figures 6 et 7. Inversement, les générateurs  $x_1, \dots, x_{n-2}$  vérifiant les relations (21) satisfont :

$$x_i x_{i+1} x_{i+2} x_i x_{i+1} x_{i+2} = x_i x_{i+1} x_i x_{i+1}^2 x_{i+2} x_{i+1} x_{i+2} = 1,$$

où l'on a successivement utilisé la 3ème relation de (21), puis deux fois la 2ème relation de (21) (pour  $x_i$  et  $x_{i+1}$ , et pour  $x_{i+1}$  et  $x_{i+2}$ ).

## 5 Début d'une nouvelle approche pour la théorie des représentations des groupes alternés

### 5.1 Classes de conjugaison dans $A_n$

Que ce soit pour démontrer la simplicité des règles de branchement (cf Proposition 3.5 ou pour rechercher un ensemble de générateurs des algèbres de Gelfand-Tsetlin, il est utile de connaître la structure des centres des algèbres  $\mathbb{C}[A_i]$  et des centralisateurs des algèbres  $\mathbb{C}[A_{i-1}]$  dans  $\mathbb{C}[A_i]$ . Nous rappelons donc ici les résultats connus sur les classes de conjugaison de  $A_i$  et de  $A_i$  par  $A_{i-1}$ .

De manière générale, soit  $G$  un groupe fini et  $H$  un sous-groupe de  $G$ . Nous appellerons parfois la  $H$ -conjugaison la conjugaison par les éléments de  $H$ . Si l'on ne précise pas, la conjugaison signifiera la conjugaison par les éléments de  $G$ .

Soit  $L$  le nombre d'orbites distinctes dans  $G$  par la conjugaison, notons-les  $O_G^{(1)}, \dots, O_G^{(L)}$ . Soit  $M$  le nombre d'orbites distinctes dans  $G$  par la  $H$ -conjugaison, notons-les  $O_H^{(1)}, \dots, O_H^{(M)}$ .

**Proposition 5.1.** *On a :*

- Une base du centre de  $\mathbb{C}[G]$  est formée par les  $c^{(j)} = \sum_{g \in O_G^{(j)}} g$  pour  $j = 1, \dots, L$ .
- Une base du centralisateur de  $\mathbb{C}[H]$  dans  $\mathbb{C}[G]$  est formée par les éléments  $d_H^{(j)} = \sum_{g \in O_H^{(j)}} g$  pour  $j = 1, \dots, M$ .

Rappelons la notation cyclique pour un élément  $\pi$  de  $S_n$ . On note :

$$\pi = (i_1, i_2, \dots, i_{p_1})(j_1, j_2, \dots, j_{p_2}) \dots (k_1, k_2, \dots, k_{p_m}),$$

avec  $i_1, \dots, i_{p_1}, j_1, \dots, j_{p_2}, k_1, \dots, k_{p_m} \in \{1, \dots, n\}$  tous 2 à 2 distincts, lorsque  $\pi(i_1) = i_2, \pi(i_2) = i_3, \dots, \pi(i_{p_1}) = i_1$ , puis  $\pi(j_1) = j_2$  et ainsi de suite. La longueur d'un cycle est comprise entre 1 et  $n$ , et la

somme des longueurs des cycles est égale à  $n$ . Un cycle de longueur 1, comme  $(i)$ , signifie que  $\pi(i) = i$  et on omet parfois les cycles de longueur 1 (ils sont sous-entendus). Les cycles commutent entre eux car ils n'ont aucun nombre  $1, \dots, n$  en commun. On peut donc choisir de les ranger par ordre de taille décroissante, ci-dessus  $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_m$ . On notera la structure cyclique d'un élément :

$$\lambda(\pi) := (p_1, \dots, p_m),$$

où l'on aura ranger les cycles  $p_i$  dans l'ordre décroissant de leurs longueurs.

Pour  $\pi \in S_n$ , l'orbite de  $\pi$  pour la conjugaison est l'ensemble des éléments qui ont la même structure cyclique que  $\pi$ . L'orbite de  $\pi$  pour la  $S_{n-1}$ -conjugaison est l'ensemble des éléments qui ont la même structure cyclique que  $\pi$  et tels que la longueur du cycle qui contient la lettre  $n$  soit la même que pour  $\pi$ . Une structure cyclique est une partition de  $n$  ; si de plus on indique dans quel cycle se trouve  $n$ , on appellera ceci une *structure  $n$ -cyclique*. Par exemple, dans  $S_3$ , les permutations  $(1, 2)$  et  $(1, 3)$  n'ont pas la même structure 3-cyclique. Ainsi, l'orbite de  $\pi$  pour la  $S_{n-1}$ -conjugaison est l'ensemble des éléments qui ont la même structure  $n$ -cyclique que  $\pi$ .

Pour un élément  $\pi \in S_n$  tel que :

$$\pi = (i_1, \dots, i_{p_1}) \dots (j_1, \dots, j_{p_m})(n, k_1, \dots, k_{q-1}),$$

c'est-à-dire que  $\pi$  est constitué de cycles de longueur  $p_1, \dots, p_m$  et  $q$ , et l'élément  $n$  est dans un cycle de longueur  $q$ . On notera la  $n$ -structure cyclique de  $\pi$  :

$$\mu(\pi) := (p_1, \dots, p_m; q),$$

où l'on a rangé les cycles ne contenant pas  $n$  dans l'ordre de taille décroissante :  $p_1 \geq \dots \geq p_m$ .

On rappelle ici la structure des classe de conjugaison dans  $A_n$ . Soit  $\pi \in A_n$  avec  $\lambda(\pi) = (p_1, \dots, p_m)$  la structure cyclique de  $\pi$ . Le fait que  $\pi \in A_n$  signifie qu'il y a un nombre pair de  $p_i$  qui sont pairs.

- Supposons qu'il existe  $\sigma \in S_n \setminus A_n$  telle que  $\sigma\pi\sigma^{-1} = \pi$  et soit  $\pi'$  tel que  $\pi' = x\pi x^{-1}$  pour un élément  $x$  de  $S_n$ .

Si  $x \in A_n$  alors  $\pi'$  et  $\pi$  sont conjugués dans  $A_n$  ; et si  $x \in S_n \setminus A_n$  alors  $x\sigma\pi(x\sigma)^{-1} = x\sigma\pi\sigma^{-1}x^{-1} = \pi'$  et donc  $\pi'$  et  $\pi$  sont conjugués dans  $A_n$  car  $x\sigma \in A_n$ . Donc, ici, l'orbite de  $\pi$  pour la conjugaison dans  $A_n$  coïncide avec l'orbite de  $\pi$  pour la conjugaison dans  $S_n$ .

- Par contre, si  $\forall \sigma \in S_n \setminus A_n$  on a  $\sigma\pi\sigma^{-1} \neq \pi$ , alors l'orbite de  $\pi$  pour la  $S_n$ -conjugaison se scinde en 2 orbites de tailles égales pour la  $A_n$ -conjugaison, qui sont respectivement formées par les éléments de la forme  $x\pi x^{-1}$  avec  $x \in A_n$ , et par les éléments de la forme  $x\pi x^{-1}$  avec  $x \in S_n \setminus A_n$ . Les classes sont de tailles égales car l'une est l'image de l'autre par la conjugaison par un élément de  $S_n \setminus A_n$ .

En conclusion, pour une structure cyclique  $\lambda$  de  $A_n$ , soit tout les éléments de  $A_n$  ayant comme structure  $\lambda$  forment une classe de conjugaison comme dans  $S_n$ , soit ils se scindent en 2 classes de conjugaison différentes de tailles égales. De plus, ils se scindent si et seulement si pour tout élément  $\pi$  de structure  $\lambda$ , il n'existe pas de  $\sigma \in S_n \setminus A_n$  qui commute avec  $\pi$ .

Or, les seuls éléments qui commutent avec une permutation  $\pi$  sont les produits de puissances de cycles contenus dans  $\pi$ , ainsi que les éléments qui permutent les cycles de même longueur. Ainsi, s'il y

a un cycle de longueur pair dans  $\pi$ , alors la permutation constituée de ce seul cycle est dans  $S_n \setminus A_n$  et commute avec  $\pi$ . Aussi, s'il y a 2 cycles de même longueur impaire dans  $\pi$ , alors la permutation qui échange un à un les éléments de ces 2 cycles commute avec  $\pi$ , et c'est une permutation impaire en tant que produit d'un nombre impair de transpositions. On a donc le critère suivant connu pour savoir si pour  $\pi \in A_n$  la classe de conjugaison de  $\pi$  par  $S_n$  se scinde en 2 classes pour la  $A_n$ -conjugaison :

**Proposition 5.2.** *Soit  $\pi \in A_n$ ,  $n > 1$ , avec la structure cyclique  $\lambda(\pi) = (p_1, \dots, p_m)$ . Toutes les permutations qui ont la structure cyclique  $\lambda(\pi)$  forment :*

- deux classes de conjugaison dans  $A_n \Leftrightarrow$  tous les  $p_i$  sont distincts et impairs.
- une seule classe de conjugaison dans  $A_n$  sinon.

Nous noterons  $Z_n$  le centre de  $\mathbb{C}[A_n]$  et nous noterons  $c_\lambda$  (resp.  $c_\lambda$  et  $c'_\lambda$ ) le(s) élément(s) de la base de  $Z_n$  de la Proposition 5.1 pour une structure cyclique  $\lambda$  qui ne se scinde pas (resp. qui se scinde). Par exemple, la base décrite dans la Proposition 5.1 pour  $Z_4$  est :  $e$ ,  $c_{(2,2)} = (12)(34) + (13)(24) + (14)(23)$ ,  $c_{(3)} = (234) + (124) + (143) + (132)$  et  $c'_{(3)} = (243) + (134) + (142) + (123)$ .

Nous noterons  $Z(n, n-1)$  le centralisateur de  $\mathbb{C}[A_{n-1}]$  dans  $\mathbb{C}[A_n]$ . Maintenant, soit  $\pi \in A_n$  dont la structure  $n$ -cyclique est :

$$\mu(\pi) = (p_1, \dots, p_m; q).$$

On sait que l'orbite de  $\pi$  par la  $S_{n-1}$ -conjugaison dans  $S_n$  est l'ensemble des éléments qui ont la même structure  $n$ -cyclique que  $\pi$ . Cette fois-ci, cette orbite se scinde en 2 orbites pour la  $A_{n-1}$ -conjugaison si l'on ne peut pas trouver  $\sigma \in S_{n-1} \setminus A_{n-1}$  telle que  $\sigma\pi\sigma^{-1} = \pi$ , c'est-à-dire qu'il faut appliquer un critère similaire à celui de la Proposition 5.2, mais sans prendre en compte le cycle contenant  $n$ . Remarquons de plus que si le cycle contenant  $n$  est de longueur paire, alors il y a obligatoirement au moins 1 autre cycle de longueur paire, qui, lui, ne contient pas  $n$ . On a donc :

**Proposition 5.3.** *Soit  $\pi \in A_n$ ,  $n > 2$ , avec la structure  $n$ -cyclique  $\mu(\pi) = (p_1, \dots, p_m; q)$ .*

*L'orbite de  $\pi$  pour la  $S_{n-1}$ -conjugaison se scinde en 2 orbites pour la  $A_{n-1}$ -conjugaison si et seulement si tous les  $p_i$  sont distincts, impairs et de plus  $q$  est impair.*

On note que  $q$  peut être égal à un des nombres  $p_i$ . Par exemple, dans  $A_6$ , les permutations de la forme  $(i, j, k)(l, m, n)$  forment une seule classe pour la conjugaison, mais forment deux classes pour la  $A_5$ -conjugaison.

Pour chaque structure  $n$ -cyclique  $\mu$  qui ne se scinde pas (resp. qui se scinde), on notera  $d_\mu$  (resp.  $d_\mu$  et  $d'_\mu$ ) le(s) élément(s) de la base décrite dans la Proposition 5.1. Par exemple, cette base pour  $Z(4, 3)$  est :  $e$ ,  $d_{(3;1)} = (123)$ ,  $d'_{(3;1)} = (132)$ ,  $d_{(1;3)} = (234) + (124) + (143)$ ,  $d'_{(1;3)} = (243) + (142) + (134)$ ,  $d_{(2;2)} = (12)(34) + (13)(24) + (23)(14)$ .

Dans le cas des groupes symétriques, les règles de branchement sont connues. Toutefois, on peut prouver leur simplicité sans aucune connaissance préalable sur la théorie des représentations de  $S_n$  en étudiant les centralisateurs (voir [3, 30] ou annexe C). On a :

**Théorème 5.4.** *Le centralisateur de  $\mathbb{C}[S_{n-1}]$  dans  $\mathbb{C}[S_n]$  est commutatif pour tout  $n$ .*

**Corollaire 5.5.** *Pour tout  $n$ , l'algèbre engendrée par l'union des centres des  $\mathbb{C}[S_i]$  pour  $i = 1, \dots, n$ , est égale à l'algèbre engendrée par l'union des centralisateurs des  $\mathbb{C}[S_{i-1}]$  dans  $\mathbb{C}[S_i]$  pour  $i = 2, \dots, n$ .*

Malheureusement, l'analogie du fait que, pour  $\pi \in S_n$ , les éléments  $\pi$  et  $\pi^{-1}$  soient conjugués par un élément de  $S_{n-1}$  (voir Annexe C) n'est pas vrai pour  $A_n$ . Pour prouver que le centralisateur de  $\mathbb{C}[A_{n-1}]$  dans  $\mathbb{C}[A_n]$  est commutatif, il faut probablement faire intervenir plus explicitement la structure des classes de conjugaison décrites précédemment.

## 5.2 Générateurs des algèbres de Gelfand-Tsetlin

L'algèbre de Gelfand-Tsetlin de  $A_n$  est définie comme la sous-algèbre de  $\mathbb{C}[A_n]$  engendrée par l'union des  $Z_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Pour reproduire l'approche de A. Okounkov et A. Vershik dans le cas des groupes alternés, il faut trouver un ensemble de générateurs de ces sous-algèbres. Dans le cas des groupes symétriques, ce sont les éléments de Jucys-Murphy qui sont les générateurs des algèbres de Gelfand-Tsetlin, et l'étude de leur "spectre" sur les vecteurs de base conduit à prouver la bijection entre les représentations irréductibles et les diagrammes de Young.

Nous allons donc entamer la recherche d'analogues d'éléments de Jucys-Murphy pour la chaîne des groupes alternés. On rappelle que pour trouver la dimension de l'algèbre de Gelfand-Tsetlin, il faut additionner les dimensions des représentations irréductibles (voir le diagramme de Bratteli en annexe B). Ainsi, pour  $\mathbb{C}[A_3]$ , l'algèbre est de dimension 3, pour  $\mathbb{C}[A_4]$ , elle est de dimension 6, pour  $\mathbb{C}[A_5]$ , elle est de dimension 16.

Nous cherchons donc un ensemble d'éléments qui commutent entre eux et qui engendrent une sous-algèbre d'une certaine dimension donnée.

### 5.2.1 Algèbre de Gelfand-Tsetlin de $A_3$

Dans  $A_3$ , on dispose de  $(1, 2, 3)$  et  $(1, 3, 2)$ , étant donné qu'il n'y a pas d'intérêt à considérer l'élément neutre. Toute combinaison de la forme  $j_3 = (1, 2, 3) + \alpha(1, 3, 2)$  est un élément de l'algèbre de Gelfand-Tsetlin. Voyons lesquels peuvent être des générateurs. Il faut simplement que  $j_3^2$  soit indépendant de  $j_3$  et de  $e$  (l'élément neutre). On a :

$$j_3^2 = 2\alpha \cdot e + \alpha^2(1, 2, 3) + (1, 3, 2).$$

Il faut que  $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha^2 & 1 \end{pmatrix}$  soit non-dégénérée, donc  $\alpha^3$  doit être différent de 1. C'est déjà une information intéressante, car on voit que la situation sera différente du groupe symétrique. En effet le  $n^{ieme}$  élément de Jucys-Murphy est la somme des transpositions qui contiennent  $n$ . Or, ici on voit que cela ne pourra pas être la somme des cycles de longueur 3 qui contiennent  $n$ . On cherche bien sûr à trouver un ensemble de générateurs le plus simple possible, alors on va choisir pour l'instant  $j_3 = (1, 2, 3)$ .

### 5.2.2 Algèbre de Gelfand-Tsetlin de $A_4$

On cherche un élément de  $\mathbb{C}[A_4]$ , qui commute avec  $j_3 = (1, 2, 3)$ , et qui engendre avec  $j_3$  une algèbre de dimension 6. Pour simplifier ce qui suivra, on va introduire une notation : pour  $g \in A_n$ , nous noterons  $\Psi_g$  la somme des éléments de la classe de conjugaison par  $(1, 2, 3)$ . Par exemple, ici dans  $\mathbb{C}[A_4]$ , on a :  $\Psi_{(1,2,3)} = (1, 2, 3)$ ,  $\Psi_{(1,3,2)} = (1, 3, 2)$  bien sûr, et  $\Psi_{(2,3,4)} = (2, 3, 4) + (1, 2, 4) + (1, 4, 3)$ ,  $\Psi_{(2,4,3)} = (2, 4, 3) + (1, 4, 2) + (1, 3, 4)$  et  $\Psi_{(1,2)(3,4)} = (1, 2)(3, 4) + (1, 3)(2, 4) + (1, 4)(2, 3)$ .



Les éléments les plus simples qui commutent avec  $j_3$  que l'on peut trouver sont ces éléments  $\Psi$ , mais on peut aussi envisager d'en faire des combinaisons. Il est assez naturel de vouloir que  $(2, 3, 4)$  soit présent car c'est, avec  $(1, 2, 3)$ , le générateur de  $A_4$  dans notre code génétique (20). On peut aisément vérifier que, en choisissant  $j_4 = \Psi_{(2,3,4)}$ , on a les éléments suivants qui sont linéairement indépendants :

$$e, j_3, j_3^2, j_4, j_3 j_4 \text{ et } j_3^2 j_4,$$

et donc,  $j_3$  et  $j_4$  engendrent une sous-algèbre commutative de  $\mathbb{C}[A_4]$  de dimension 6.

### 5.2.3 Algèbre de Gelfand-Tsetlin de $A_5$

Maintenant, on cherche un élément de  $\mathbb{C}[A_5]$  qui commute avec  $j_3$  et  $j_4$ , c'est-à-dire avec  $(1, 2, 3)$  et  $(2, 3, 4) + (1, 2, 4) + (1, 4, 3)$ . Or, un élément qui commute avec  $(1, 2, 3)$ , s'exprime obligatoirement comme une combinaison de  $\Psi_g$  avec  $g \in A_5$ . En fait, l'algèbre de Gelfand-Tsetlin de  $A_5$  est de dimension 16, donc les éléments qui sont dans  $\mathbb{C}[A_5]$ , mais pas dans  $\mathbb{C}[A_4]$ , et qui commutent avec  $j_3$  et  $j_4$ , forment une algèbre de dimension 10. Ecrivons-en une base :

$$\begin{aligned} u_1 &= \Psi_{(1,2,5)} + \Psi_{(1,3,4,2,5)} + \Psi_{(1,4,3,2,5)} + \Psi_{(1,2)(4,5)}, \\ u_2 &= \Psi_{(1,3,5)} + \Psi_{(1,2,4,3,5)} + \Psi_{(1,4,2,3,5)} + \Psi_{(1,2)(4,5)}, \\ u_3 &= \Psi_{(3,4,5)} + \Psi_{(1,4,2,3,5)} + \Psi_{(4,1,2,3,5)} + \Psi_{(1,4)(3,5)}, \\ u_4 &= \Psi_{(3,5,4)} + \Psi_{(1,3,2,4,5)} + \Psi_{(1,3,4,2,5)} + \Psi_{(1,4)(3,5)}, \\ u_5 &= \Psi_{(1,2)(3,5)} + \Psi_{(1,4)(2,5)} + \Psi_{(1,2)(4,5)} + \Psi_{(1,4)(3,5)}, \\ u_6 &= \Psi_{(1,2,3,4,5)} + \Psi_{(1,2,4,3,5)} + \Psi_{(1,4,2,3,5)} + \Psi_{(4,1,2,3,5)}, \\ u_7 &= \Psi_{(1,2,4,3,5)} + \Psi_{(1,3,2,4,5)} + \Psi_{(1,4,3,2,5)} + \Psi_{(4,1,2,3,5)}, \\ u_8 &= \Psi_{(1,3,2,4,5)} + \Psi_{(1,3,4,2,5)} + \Psi_{(1,4,3,2,5)} + \Psi_{(4,1,3,2,5)}, \\ u_9 &= \Psi_{(1,3,4,2,5)} + \Psi_{(1,4,2,3,5)} + \Psi_{(1,2)(4,5)} + \Psi_{(1,4)(3,5)}, \\ u_{10} &= \Psi_{(1,2,4,3,5)} + \Psi_{(1,4,3,2,5)} + \Psi_{(1,2)(4,5)} + \Psi_{(1,4)(2,5)}. \end{aligned}$$

On peut vérifier que ces éléments commutent avec  $j_3$  et  $j_4$ , et qu'ils sont linéairement indépendants. En effet, si l'on écrit que  $\sum_{i=1}^{10} \lambda_i u_i = 0$  où  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ , alors, par exemple, immédiatement  $\lambda_1 = 0$  car  $(1, 2, 5)$  est seulement dans  $u_1$ , et de manière similaire les autres  $\lambda_i$  sont nuls.

Cherchons à partir des  $u_i$  les éléments qui contiennent  $\Psi_{(3,4,5)}$  car  $(3, 4, 5)$  est le 3ème générateur de  $A_5$  dans notre code. Il en existe qui sont la somme de au plus 12 permutations et par souci de simplicité, on se restreint à ces éléments-là. On en trouve 6 différents :

$$\begin{aligned} x_1 &= u_3 = \Psi_{(3,4,5)} + \Psi_{(1,4,2,3,5)} + \Psi_{(4,1,2,3,5)} + \Psi_{(1,4)(3,5)}, \\ x_2 &= u_3 - u_9 + u_{10} - u_7 + u_8 = \Psi_{(3,4,5)} + \Psi_{(1,2,4,3,5)} + \Psi_{(4,1,3,2,5)} + \Psi_{(1,4)(2,5)}, \\ x_3 &= u_1 + u_3 - u_9 = \Psi_{(3,4,5)} + \Psi_{(1,2,5)} + \Psi_{(4,1,2,3,5)} + \Psi_{(1,4,3,2,5)}, \\ x_4 &= u_3 + u_2 - u_9 + u_8 - u_7 = \Psi_{(3,4,5)} + \Psi_{(1,3,5)} + \Psi_{(1,4,2,3,5)} + \Psi_{(4,1,3,2,5)}, \\ x_5 &= u_3 + u_4 - u_9 + u_{10} - u_7 = \Psi_{(3,4,5)} + \Psi_{(3,5,4)} + \Psi_{(1,4)(3,5)} + \Psi_{(1,4)(2,5)}, \\ x_6 &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 2u_9 - u_7 = \Psi_{(3,4,5)} + \Psi_{(3,5,4)} + \Psi_{(1,2,5)} + \Psi_{(1,3,5)}. \end{aligned}$$

Parmi tous ces candidats potentiels pour notre  $j_5$ , il faut sélectionner ceux qui avec  $j_3$  et  $j_4$  engendrent une algèbre de dimension 16. Pour chaque  $x_i$ , on pourrait essayer de trouver 16 produits constitués de  $j_3$ ,  $j_4$  et  $x_i$  et de leur puissances qui sont indépendants, mais cela conduirait à des calculs vraiment très lourds. Nous allons plutôt suivre la méthode suivante : pour chaque  $x_i$ , on sait que  $j_3$ ,  $j_4$  et  $x_i$

commutent, on peut donc les diagonaliser simultanément dans toutes les représentations irréductibles de  $A_5$ . Si l'on arrive à calculer explicitement les matrices de ces éléments dans chaque représentation, on pourra les diagonaliser dans la même base et comparer leur spectre pour voir si, à eux 3, ils engendrent l'ensemble des matrices diagonales dans la base de Gelfand-Tsetlin. Le calcul explicite des matrices dans chaque représentation est décrit en annexe 4. Voici les spectres que l'on trouve, notons qu'il est très important que ces spectres proviennent des diagonalisations dans la même base, car l'ordre des valeurs propres est essentiel.

$$\begin{aligned}
Spec(j_3) &= (\underline{1}, \underline{1}, \underline{1}, -\gamma_3^+, -\gamma_3^-, \underline{1}, \underline{1}, -\gamma_3^+, -\gamma_3^-, -\gamma_3^-, -\gamma_3^+, \underline{1}, -\gamma_3^+, -\gamma_3^-, -\gamma_3^-, -\gamma_3^+), \\
Spec(j_4) &= (3, \underline{3}, \underline{-1}, \gamma_3^-, \gamma_3^+, \underline{-1}, \underline{-1}, \gamma_3^-, \gamma_3^+, \gamma_3^+, \gamma_3^-, \underline{-1}, \gamma_3^-, \gamma_3^+, -3\gamma_3^+, -3\gamma_3^-), \\
Spec(x_1) &= (12, \underline{-3}, \underline{-3}, 3\gamma_3^-, 3\gamma_3^+, \underline{2-2\sqrt{5}}, \underline{2+2\sqrt{5}}, s^{++}, s^{+-}, s^{-+}, s^{--}, \underline{0}, 0, 0, 0, 0), \\
Spec(x_2) &= (12, \underline{-3}, \underline{-3}, 3\gamma_3^+, 3\gamma_3^-, \underline{2+2\sqrt{5}}, \underline{2-2\sqrt{5}}, s^{+-}, s^{++}, s^{--}, s^{-+}, \underline{0}, 0, 0, 0, 0), \\
Spec(x_3) &= (12, \underline{-3}, \underline{1}, 2\gamma_3^-, 2\gamma_3^+, \underline{1-\sqrt{5}}, \underline{1+\sqrt{5}}, r^{++}, r^{+-}, r^{-+}, r^{--}, \underline{-2}, \underline{-4\gamma_3^-}, \underline{-4\gamma_3^+}, 0, 0), \\
Spec(x_4) &= (12, \underline{-3}, \underline{1}, 2\gamma_3^+, 2\gamma_3^-, \underline{1+\sqrt{5}}, \underline{1-\sqrt{5}}, r^{+-}, r^{++}, r^{--}, r^{-+}, \underline{-2}, \underline{-4\gamma_3^+}, \underline{-4\gamma_3^-}, 0, 0), \\
Spec(x_5) &= (12, \underline{-3}, \underline{-3}, 6, 6, \underline{2}, \underline{2}, -4, -4, -4, -4, \underline{0}, 0, 0, 0, 0), \\
Spec(x_6) &= (12, \underline{\quad}, \underline{-3}, 5, 5, 5, \underline{0}, 0, 0, 0, 0, 0, \underline{-4}, -4, -4, 0, 0),
\end{aligned}$$

où  $\gamma_3^\pm = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ ,  $s^{\pm\pm} = (-1 \pm \sqrt{5})(1 \pm i\sqrt{3})$  et  $r^{\pm\pm} = (1 \pm \sqrt{5})(1 \pm i\sqrt{3})$ .

Pour voir si par exemple,  $j_3$ ,  $j_4$  et  $x_1$  engendrent toutes les matrices diagonales, on note les positions des 1 dans le spectre de  $j_3$  (on les a soulignées, c'est 1,2,3,6,7,12). Ensuite, on regarde parmi ces positions celles qui sont déjà différenciées par  $j_4$  :  $j_4$  différencie les positions 1 et 2 des autres. Donc on souligne par exemple les positions 3,6,7,12 et on regarde si les valeurs dans ces positions sont différentes dans  $x_1$  (elles le sont). On reproduit ceci pour vérifier que toutes les 16 positions sont différenciées entre elles par un des 3 éléments. On applique cette méthode successivement à  $x_1, \dots, x_6$  et on constate que l'on doit éliminer de la liste des candidats  $x_5$  et  $x_6$ , mais que l'on peut conserver  $x_1, x_2, x_3$  et  $x_4$  comme candidats potentiels pour  $j_5$ .

Donc, si l'on veut un élément qui contienne le générateur (345), et qui soit une somme minimale avec des coefficients 1, alors on a le choix entre  $x_1, x_2, x_3$ , et  $x_4$ .

On constate que l'on ne peut pas construire des générateurs de l'algèbre de Gelfand-Tsetlin seulement à partir des cycles de longueur 3, il faut soit rajouter les cycles de longueur 5, soit les cycles de longueur 5 et les produits de 2 transpositions.

Il vaudrait mieux qu'il y ait le moins de structures cycliques différentes possibles dans nos éléments, pour que la situation ne se complique pas trop. Il vaut donc pour l'instant mieux choisir pour  $j_5$  entre  $x_3$  ou  $x_4$ , et ensuite voir si l'on peut construire  $j_6$  seulement à partir des 3-cycles et des 5-cycles.

## 5.2.4 Algèbre de Gelfand-Tsetlin de $A_6$ et $A_7$ et perspectives

Une étude numérique analogue à celle menée ci-dessus montre que pour  $A_6$ , on peut garder juste les cycles de longueur 3 et les cycles de longueur 5, mais par contre à partir de  $A_7$ , il est obligatoire d'utiliser les cycles de longueur 7.

On peut chercher les analogues des éléments de Jucys-Murphy comme des éléments de base des centralisateurs  $Z(n, n-1)$ , c'est-à-dire comme des éléments étant la somme sur une structure  $n$ -cyclique si elle ne se scinde pas, ou la somme sur la moitié d'une structure  $n$ -cyclique si elle se scinde (rappelons

que dans le cas des groupes symétriques, le  $n$ -ième élément de Jucys-Murphy est la somme sur les transpositions contenant la lettre  $n$  :  $(1n) + (2n) + \cdots + (n-1, n)$ . Dans ce cas, il semble d'après l'étude numérique que nous serions obligés de prendre 2 nouveaux générateurs par étage de la tour à partir de  $n = 5$ , plus précisément avec les notations de la sous-section 5.1 :

- pour  $n = 2k - 1$ ,  $j_n = d_{(1, \dots, 3)}$  et  $\tilde{j}_n = d_{(2k-1)}$  (ou  $d'_{(2k-1)}$ ).
- pour  $n = 2k$ ,  $j_n = d_{(1, \dots, 3)}$  et  $\tilde{j}_n = d_{(1, 2k-1)}$  (ou  $d'_{(1, 2k-1)}$ ).

## 6 Conclusion et perspectives

Dans un premier temps, la nouvelle approche de Okounkov-Vershik pour la théorie des représentations de la chaîne des groupes symétriques ([3, 4, 5]) fournit un éclairage différent sur le sujet par rapport aux approches "traditionnelles" ([27, 28]). Par exemple, les tableaux et diagrammes de Young apparaissent dans l'étude du spectre de certains éléments des algèbres des groupes symétriques : les éléments de Jucys-Murphy. Une autre nouveauté est que la simplicité des règles de branchement est démontrée au tout début, et intervient ensuite dans la construction des bases dites bases de Gelfand-Tsetlin ([3, 30]).

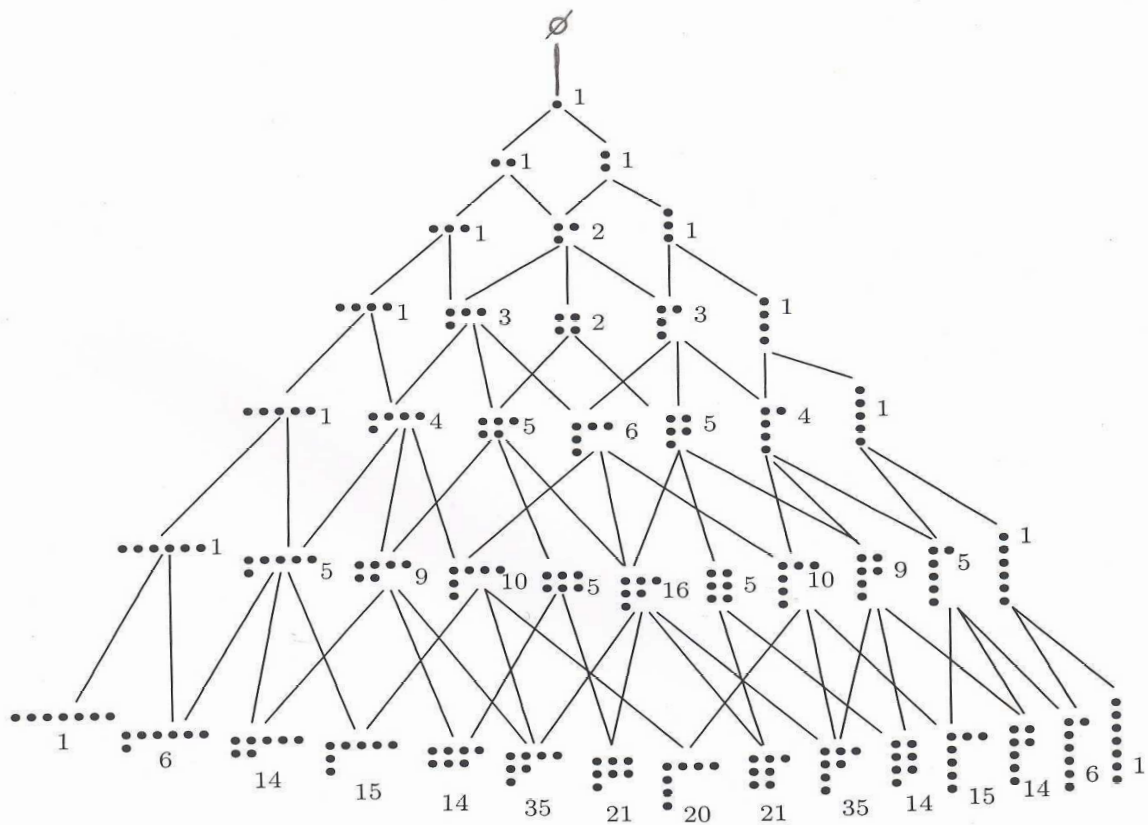
Dans un second temps, cette approche vise à établir une méthode et un cadre reproductible pour la théorie des représentations d'autres chaînes de groupes et d'algèbres, en particulier les autres séries des groupes de Coxeter finis et une classe de chaînes d'algèbres, appelées chaînes d'algèbres locales et stationnaires ([3, 24]). Elle a été adaptée avec succès à l'étude des représentations projectives des groupes symétriques ([5]), et à l'étude des représentations des tours locales et stationnaires des algèbres de Hecke ([6, 7]) et des algèbres de Birman-Murakami-Wenzl ([8]).

Nous nous sommes intéressés à la possibilité de généraliser cette approche au cas de la chaîne des groupes alternés. Les présentations connues des groupes alternés ne munissaient pas la chaîne d'une structure locale et stationnaire. Vershik et Vserminov ont récemment donné dans [26] une nouvelle présentation qui répond à cette demande. Utilisant l'algorithme de Coxeter-Todd, nous en avons donné (section 4) une autre qui lui est très semblable.

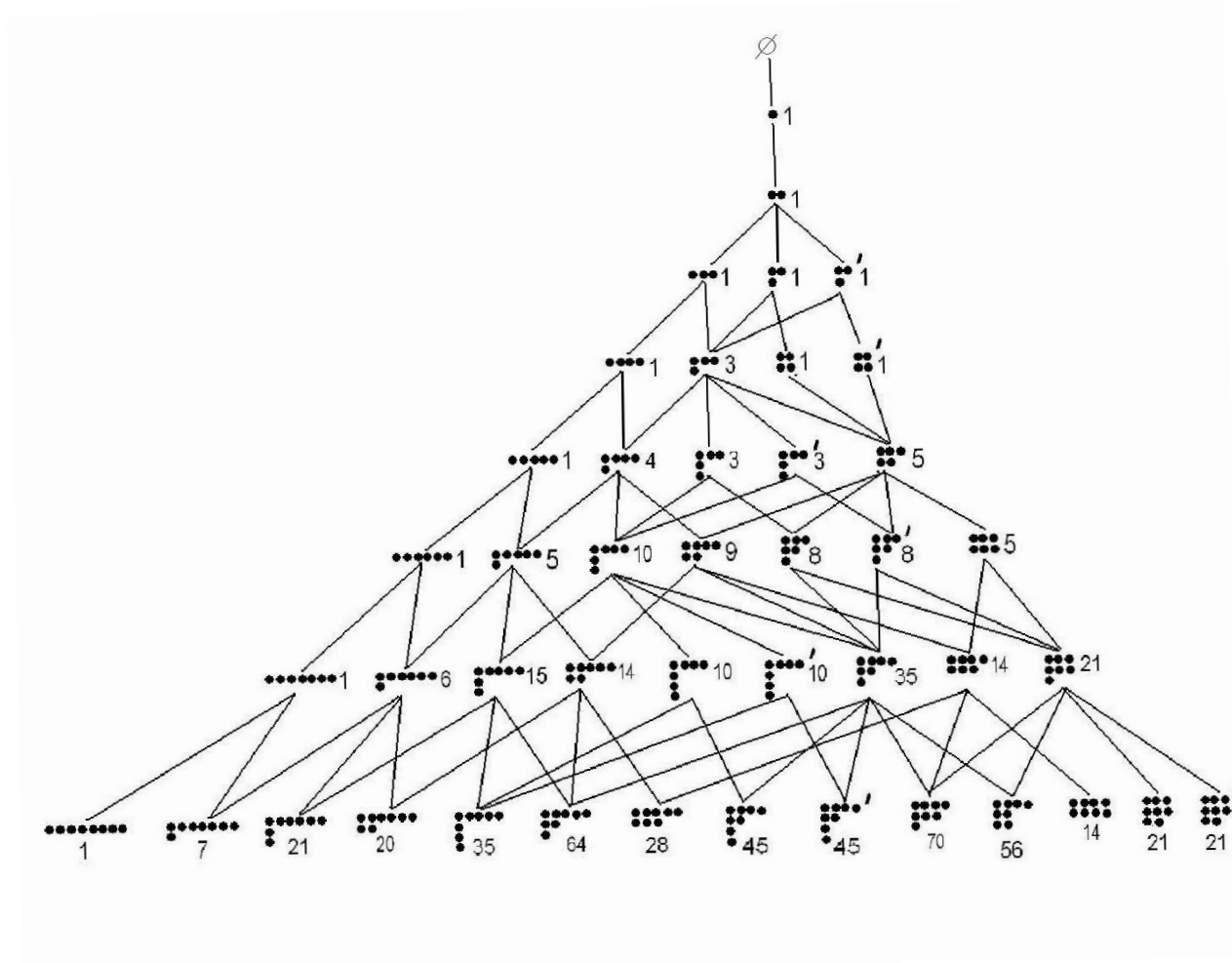
Les perspectives de ce travail sont de trouver des analogues des éléments de Jucys-Murphy pour les groupes alternés, et ensuite de les utiliser (en fait d'étudier leur spectre) pour adapter l'approche de Okounkov-Vershik à la chaîne des groupes alternés. En particulier, il serait intéressant de comprendre comment le fait que pour les groupes alternés il y ait 2 représentations irréductibles non-isomorphes de même dimension correspondant à un même diagramme de Young (un diagramme auto-conjugué, voir annexe B) est encodé dans le spectre de ces analogues d'éléments de Jucys-Murphy.

Nous avons également cherché à généraliser la présentation obtenue ici pour le groupe alterné  $A_n$  aux groupes alternés des autres groupes de Coxeter et leurs extensions spinorielles, ainsi qu'aux algèbres de Hecke alternées ([38]).

# A Diagramme de Bratteli pour la chaîne des groupes symétriques



## B Diagramme de Bratteli pour la chaîne des groupes alternés



## C Démonstration du Théorème 5.4

Nous donnons ici une démonstration directe de la commutativité du centralisateur de  $\mathbb{C}[S_{n-1}]$  dans  $\mathbb{C}[S_n]$ , ce qui prouve la simplicité du diagramme de Bratteli des groupes symétriques (voir [3, 30]).

Preuve du Théorème 5.4 :

Soit  $\pi$  une permutation de  $S_n$  avec une structure  $n$ -cyclique quelconque. Ecrivons  $\pi$  et  $\pi^{-1}$  l'une sous l'autre de manière à ce que la lettre  $n$  dans  $\pi$  soit juste au-dessus de la lettre  $n$  dans  $\pi^{-1}$  et que les cycles soient placés dans le même ordre ( $\pi$  et  $\pi^{-1}$  ont la même structure cyclique) :

$$\begin{aligned}\pi &= (a_1, a_2, \dots, a_i) \dots (\dots) \dots (n, x_1, \dots, x_j) \\ \pi^{-1} &= (a_i, a_{i-1}, \dots, a_1) \dots (\dots) \dots (n, x_j, \dots, x_1).\end{aligned}$$

Rappelons que si l'on conjugue  $\pi$  par une permutation quelconque  $\sigma \in S_n$ , le résultat sera la permutation avec la même structure cyclique que  $\pi$  (cf plus haut) mais avec  $a_1$  remplacé par  $\sigma(a_1)$ ,  $a_2$  remplacé par  $\sigma(a_2)$  et ainsi de suite jusqu'à  $x_j$ . On vérifie donc que l'on peut obtenir  $\pi^{-1}$  en conjuguant  $\pi$  par la permutation qui envoie :  $a_1 \mapsto a_i$ ,  $a_2 \mapsto a_{i-1}$ ,  $\dots$ ,  $n \mapsto n$ ,  $x_1 \mapsto x_j$ ,  $\dots$ . Ainsi,  $\pi$  et  $\pi^{-1}$  sont conjuguées par un élément de  $S_{n-1}$ .

Soit  $f = \sum_{\pi \in S_n} f_\pi \cdot \pi$  un élément du centralisateur de  $\mathbb{C}[S_{n-1}]$  dans  $\mathbb{C}[S_n]$ , où  $f_\pi \in \mathbb{C}$ .

Soit  $\pi_0 \in S_n$ , il existe  $\sigma_{\pi_0} \in S_{n-1}$  telle que  $\sigma_{\pi_0} \cdot \pi_0 \cdot \sigma_{\pi_0}^{-1} = \pi_0^{-1}$ . De plus, comme  $f$  est dans le centralisateur de  $\mathbb{C}[S_{n-1}]$ , on a

$$\sigma_{\pi_0} \cdot f \cdot \sigma_{\pi_0}^{-1} = f,$$

d'une part, et d'autre part

$$\sigma_{\pi_0} \cdot f \cdot \sigma_{\pi_0}^{-1} = \sum_{\pi \neq \pi_0} f_\pi \cdot \sigma_{\pi_0} \pi \sigma_{\pi_0}^{-1} + f_{\pi_0} \cdot \pi_0^{-1}.$$

En identifiant les coefficients devant  $\pi_0^{-1}$  obtenus dans les deux cas, il vient que  $f_{\pi_0} = f_{\pi_0^{-1}}$ . Et ceci pour tout  $\pi_0 \in S_n$ .

Donc, tout élément du centralisateur de  $\mathbb{C}[S_{n-1}]$  dans  $\mathbb{C}[S_n]$  est une combinaison linéaire d'éléments de la forme  $(\pi + \pi^{-1})$  avec  $\pi \in S_n$ . Soit  $S$  l'antipode de  $\mathbb{C}[S_n]$ , c'est l'opération inverse de  $S_n$  étendue linéairement à  $\mathbb{C}[S_n]$ . Simplement, à toute somme d'éléments de  $S_n$ , elle associe la somme des inverses. C'est un antiautomorphisme, c'est-à-dire que  $S(fg) = S(g)S(f)$  pour tout  $f, g \in \mathbb{C}[S_n]$ .

Soit  $f$  un élément du centralisateur, on a  $S(f) = f$  car  $S((\pi + \pi^{-1})) = (\pi + \pi^{-1})$  pour tout  $\pi \in S_n$  et  $f$  est une combinaison linéaire d'éléments de cette forme. Enfin, pour  $f, f'$  deux éléments du centralisateur on a

$$f \cdot f' = S(f \cdot f') = S(f') \cdot S(f) = f' \cdot f.$$

Ainsi, le centralisateur  $\mathbb{C}[S_{n-1}]$  dans  $\mathbb{C}[S_n]$  est commutatif. □

## D Construction explicite des représentations irréductibles de $A_5$

Nous rappelons ici la construction des représentations irréductibles de  $A_5$  qui sont la représentation triviale, une représentation de dimension 4, deux représentations de dimension 3 et une représentation de dimension 5. Les deux représentations de dimension 3 proviennent en fait de la décomposition

de la représentation irréductible de  $S_5$  de dimension 6. Nous n'avons pas besoin de différencier les représentations de dimension 3 de  $A_5$  pour calculer les spectres, nous travaillerons dans la somme des 2 qui est de dimension 6.

Dans la représentation triviale, tous les éléments de  $A_5$  ont pour image le nombre 1.

### D.1 Représentation 4 de $A_5$

On considère un espace vectoriel  $V$  de dimension 5, dont une base est  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ , et l'action d'une permutation de  $A_5$  sur  $V$  est la permutation des vecteurs de base. Il y a un sous-espace stable de dimension 1, c'est la droite engendrée par  $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5$ . La représentation irréductible de  $A_5$  de dimension 4 est le quotient de  $V$  par cette droite.

Pour trouver la matrice d'un élément de  $A_5$  dans la représentation régulière, on peut par exemple écrire la matrice de l'action de cet élément sur  $V$  dans la base :  $e_1, e_2, e_3, e_4, e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5$ , et conserver juste le bloc correspondant à  $e_1, e_2, e_3$  et  $e_4$ . Par exemple, l'image de (12345) est le bloc  $4 \times 4$  supérieur gauche de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

### D.2 Représentation 6 de $A_5$

La représentation 6 de  $A_5$  est en fait le carré alterné de la représentation 4. Nous avons déjà dit qu'elle n'était pas irréductible, mais on sait qu'elle se décompose en deux représentations irréductibles de dimension 3. Donc, si l'on diagonalise un élément de  $\mathbb{C}[A_5]$  dans cette représentation, cela sera comme si on l'avait diagonalisé dans les 2 représentations de dimension 3. Il faut donc calculer le carré alterné des matrices des éléments de type groupe calculées précédemment.

Reprenons l'exemple de (12345), l'action sur l'espace  $U = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$  de cet élément est :  $e_1 \mapsto e_2, e_2 \mapsto e_3, e_3 \mapsto e_4$  et  $e_4 \mapsto (-e_1 - e_2 - e_3 - e_4)$ . Une base du carré alterné de  $U$  est la base suivante :

$$\langle e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4 \rangle,$$

où  $e_i \wedge e_j = e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i$ . L'action de (12345) sur cette base se calcule directement :

$$\begin{aligned} e_1 \wedge e_2 &\mapsto e_2 \wedge e_3, \\ e_1 \wedge e_3 &\mapsto e_2 \wedge e_4, \\ e_1 \wedge e_4 &\mapsto e_1 \wedge e_2 - e_2 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4, \\ e_2 \wedge e_3 &\mapsto e_3 \wedge e_4, \\ e_2 \wedge e_4 &\mapsto e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_3 - e_3 \wedge e_4, \\ e_3 \wedge e_4 &\mapsto e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_4 + e_3 \wedge e_4. \end{aligned}$$

et donc on a trouvé l'image de (12345) dans la représentation 6.

### D.3 Représentation 5 de $A_5$

Tout d'abord rappelons l'isomorphisme entre  $A_5$  et  $PSL(2, \mathbb{F}_5)$ . Notons  $\mathbb{F}_p$  le corps des entiers modulo  $p$ , pour tout  $p$  nombre premier, et  $SL(n, \mathbb{F}_p)$  est l'espace des matrices  $n \times n$  à coefficients dans  $\mathbb{F}_p$  avec le déterminant égal à 1. Le groupe  $PSL(n, \mathbb{F}_p)$  est le quotient de  $SL(n, \mathbb{F}_p)$  par la relation d'équivalence :

$$A \sim B \Leftrightarrow A = \lambda B \text{ pour un } \lambda \in \mathbb{F}_p \text{ tel que } \lambda Id \in SL(n, \mathbb{F}_p) \text{ (i.e. } \lambda^n = 1).$$

Calculons le cardinal de  $SL(n, \mathbb{F}_p)$ .

Tout d'abord, calculons le cardinal de  $GL(n, \mathbb{F}_p)$ . Un élément de  $GL(n, \mathbb{F}_p)$  est un choix de  $n$  vecteurs non-nuls à  $n$  composantes dans  $\mathbb{F}_p$  qui soient linéairement indépendants. Pour le premier, on a donc  $(p^n - 1)$  choix. Pour le suivant, il faut en choisir un non-nul qui n'est pas dans la droite engendrée par le premier : on a donc  $(p^n - p)$  choix. Et ainsi de suite jusqu'au dernier où l'on n'a plus que  $(p^n - p^{n-1})$  choix. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} |GL(n, \mathbb{F}_p)| &= (p^n - p^{n-1})(p^n - p^{n-2}) \dots (p^n - 1) \\ &= p^{(0+1+\dots+n-1)}(p-1)(p^2-1) \dots (p^n-1) \\ &= p^{\frac{1}{2}n(n-1)}(p^n-1)(p^{n-1}-1) \dots (p-1). \end{aligned}$$

Maintenant,  $SL(n, \mathbb{F}_p)$  est le noyau du morphisme surjectif  $det : GL(n, \mathbb{F}_p) \rightarrow \mathbb{F}_p^*$  et donc :

$$\begin{aligned} |SL(n, \mathbb{F}_p)| &= \frac{|GL(n, \mathbb{F}_p)|}{|\mathbb{F}_p^*|} \\ &= \frac{p^{\frac{1}{2}n(n-1)}(p^n-1)(p^{n-1}-1) \dots (p-1)}{p-1} \\ &= p^{\frac{1}{2}n(n-1)}(p^n-1)(p^{n-1}-1) \dots (p^2-1). \end{aligned}$$

Pour  $n = 2$  et  $p \neq 2$ , il y a deux éléments de  $SL(n, \mathbb{F}_p)$  dans une classe de  $PSL(n, \mathbb{F}_p)$ . Donc :

$$\begin{aligned} |PSL(2, \mathbb{F}_p)| &= \frac{1}{2} |SL(2, \mathbb{F}_p)| \\ &= \frac{1}{2} \cdot p^{\frac{1}{2}n(n-1)}(p^n-1)(p^{n-1}-1) \dots (p^2-1). \end{aligned}$$

En particulier, on a que  $|PSL(2, \mathbb{F}_5)| = 60 = |A_5|$ .

Il reste donc à donner un ensemble d'éléments de  $PSL(2, \mathbb{F}_5)$  vérifiant le code génétique de  $A_5$ . En effet, dans ce cas-là, on aura un morphisme de  $A_5$  dans  $PSL(2, \mathbb{F}_5)$ , et comme  $A_5$  est simple, il ne peut pas y avoir de noyau, donc ce morphisme sera injectif. Comme de plus  $A_5$  et  $PSL(2, \mathbb{F}_5)$  ont le même cardinal, ce sera un isomorphisme. On peut vérifier que les 3 éléments suivants :

$$(123) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (234) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (345) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},$$

vérifient bien le code de  $A_5$  suivant (voir section 4) :

$$\begin{cases} a_i^3 = 1 & \text{pour tout } i = 1, 2, 3, \\ (a_i a_{i+1})^2 = 1 & \text{pour tout } i = 1, 2, \\ (a_1 a_2 a_3)^2 = 1. \end{cases}$$



Par conséquent,  $A_5$  est isomorphe à  $PSL(2, \mathbb{F}_5)$  et on a explicitement un isomorphisme.

Or, on peut plonger  $PSL(2, \mathbb{F}_5)$  dans  $S_6$ . En effet,  $PSL(2, \mathbb{F}_5)$  agit naturellement sur  $\mathbb{F}_5 P$ , c'est-à-dire sur l'ensemble des vecteurs non-nuls à deux composantes dans  $\mathbb{F}_5$ , quotienté par la relation d'équivalence :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{F}_5^*, \text{ tel que } \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Or, il y a exactement 6 vecteurs différents dans cet ensemble. En effet, écrivons un vecteur  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ . Si,  $u \neq 0$ , on peut toujours par la relation d'équivalence prendre  $u = 1$ , et donc  $v$  est quelconque dans  $\mathbb{F}_5$ . Si  $u = 0$ , tous les vecteurs sont équivalents à  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Cela nous fait donc 6 éléments, et les matrices de  $PSL(2, \mathbb{F}_5)$  permutent ces 6 éléments. Si l'on choisit une numérotation quelconque de ces 6 vecteurs, les éléments de  $PSL(2, \mathbb{F}_5)$  sont ainsi des permutations de 6 éléments, c'est-à-dire des éléments de  $S_6$ .

Donc, à tout élément de  $A_5$ , on associe de manière isomorphe un élément de  $PSL(2, \mathbb{F}_5)$ , qui peut être vu comme un élément de  $S_6$ . Or, on connaît une représentation de dimension 5 de  $S_6$  : soit  $V$  un espace vectoriel de dimension 6 avec une base  $e_1, e_2, \dots, e_6$  ; l'action de  $S_6$  sur  $V$  se fait par la permutation des vecteurs de base, et le sous-espace de dimension 1 engendré par  $e_1 + \dots + e_6$  est stable par  $S_6$ . Le quotient de  $V$  par ce sous-espace est une représentation de dimension 5 de  $S_6$ . Elle fournit donc une représentation de dimension 5 de  $A_5$ , et on a les moyens de calculer explicitement les matrices associées à tous les éléments de  $A_5$ .

De plus cette représentation est irréductible. Pour cela, voici les matrices associées à  $(123)$ ,  $(12345)$ ,  $(12354)$  et  $(12)(45)$  qui sont des éléments choisis dans chaque classe de conjugaison de  $A_5$  :

$$\begin{aligned} (123) &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (12345) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (12354) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ (12)(45) &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On peut donc calculer la valeur du caractère de cette représentation pour chaque classe de conjugaison :  $\chi_e = 5$ ,  $\chi_{(123)} = -1$ ,  $\chi_{(12345)} = 0$ ,  $\chi_{(12354)} = 0$  et  $\chi_{(12)(45)} = 1$ . On calcule ensuite la norme du caractère de cette représentation selon la formule :

$$\|\chi\|^2 = \frac{1}{|A_5|} \sum_{c_g} |c_g| \cdot |\chi_{c_g}|^2$$

où la somme porte sur toutes les classes de conjugaison  $c_g$  de  $A_5$ . Sachant que  $|c_{(123)}| = 20$ ,  $|c_{(12345)}| = |c_{(12354)}| = 12$  et  $|c_{(12)(45)}| = 15$ , on trouve :

$$|\chi|^2 = \frac{1}{60}(5^2 \cdot 1 + 20 \cdot (-1)^2 + 0 + 0 + 15 \cdot 1) = 1.$$

Donc, la représentation de  $A_5$  ci-dessus est bien la représentation irréductible de dimension 5.

## Références

- [1] Coxeter H.S.M., **Regular polytopes**, Dover Publications (1973) ISBN :0-4866-1480-8.
- [2] *Platon*, Timée (env 358 av. J.-C.) 55e-56c. Trad. L. Brisson, *Timée/Critias*, Garnier-Flammarion, 3è éd. revue 1996.
- [3] Okounkov A. and Vershik A., *A new approach to representation theory of symmetric groups. II*, Math. Sci. **131** (2) (2005) 5471.
- [4] Vershik A., *A new approach to representation theory of symmetric groups. III : Induced representations and the Frobenius-Young correspondence*, Moscow Math. **6** (3) (2006) 567.
- [5] Sergeev A. and Vershik A., *A new approach to representation theory of symmetric groups. IV :  $\mathbb{Z}_2$  graded groups and algebras*, Mosc. Math. J., **8** (4) (2008) 813.
- [6] Ogievetsky O. and Pyatov P., *Lecture on Hecke algebras*, in Proc. of the Int. School "Symmetries and Integrable Systems", Dubna (1999).
- [7] Isaev A. and Ogievetsky O., *On representations of Hecke algebras*, Czech. Jour. Phys. **55** (2005) 1433.
- [8] Isaev A. P. and Ogievetsky O. V., *Jucys-Murphy elements for Birman-Murakami-Wenzl algebras*, Proc. of Int. Workshop "Supersymmetries and Quantum Symmetries", Dubna (2009).
- [9] Cherednik I. V., *Factorizing particles on a half-line and root systems*. Teoret. Mat. Fiz. **61** vol. 1 (1984) 35.
- [10] Lambropoulou S., *Knot theory related to generalized and cyclotomic Hecke algebras of type B*, J. Knot Theory and Its Ramifications **8** (1999) 621.
- [11] Isaev A. P. and Ogievetsky O. V., *On Baxterized solutions of reflection equation and integrable chain models*. Nucl. Phys. B **760** [PM] (2007) 167.
- [12] Isaev A.P., Ogievetsky O.V. and Pyatov P.N., *On quantum matrix algebras satisfying the Cayley-Hamilton-Newton identities*. J. Phys. A : Math. Gen. **32** (1999) L115.
- [13] Isaev A.P., Ogievetsky O.V. and Pyatov P.N., *Cayley-Hamilton-Newton identities and quasitriangular Hopf algebras*. In Proc. of Int. Workshop "Supersymmetries and Quantum Symmetries", July 27-31, Eds. E.Ivanov, S.Krivonos and A.Pashnev, JINR, Dubna E2-2000-82, (1999) 397.
- [14] Ogievetsky O. and Pyatov P., *Orthogonal and symplectic quantum matrix algebras and Cayley-Hamilton theorem for them*. arXiv :math/0511618[math.QA]
- [15] Ogievetsky O., Schmidke W. B., Wess J. and Zumino B., *Six generator q-deformed Lorentz algebra*, Lett. Math. Phys. **23** (1991) 233.

- [16] Ogievetsky O., Schmidke W. B., Wess J. and Zumino B., *q-Deformed Poincaré algebra*, Commun. Math. Phys. **150** (1992) 495.
- [17] Wess J., Zumino B., Ogievetsky O. and Schmidke W. B., *Quantized Minkowski space*, in Spinors, twistors, Clifford algebras and quantum deformations, eds. Z. Oziewicz et al., Kluwer Academic Press, Netherlands, (1993) 249.
- [18] de Azcarraga J.A., Kulish P. and Rodenas F., *Reflection equation and q-Minkowski space algebras*. Lett. Math. Phys. **32** (1994) 173.
- [19] Jain V. and Ogievetsky O., *Classical isomorphisms for quantum groups*. Modern Phys. Lett. A **7** (24) (1992) 2199.
- [20] Isaev A. P. and Ogievetsky O. V., *BRST operator for quantum Lie algebras and differential calculus on quantum groups*. Theor. Math. Phys. **129** (2) (2001) 1558.
- [21] Isaev A. P. and Ogievetsky O. V., *BRST operator for quantum Lie algebras : explicit formula*. Int. Journ. of Mod. Phys. **19** supplement (2004) 240.
- [22] Gorbounov V. G., Isaev A. P. and Ogievetsky O. V., *BRST operator for quantum Lie algebras : relation to bar complex*. Theor. Math. Phys. **139** (1) (2004) 473.
- [23] Ogievetsky O. V., *Uses of quantum spaces*. Contemp. Math. 294 (2002) 161.
- [24] Vershik A., *Local stationnary algebras*, Amer.Math.Soc.Trans. **148** (2) (1991) 1.
- [25] Coxeter H.S.M. and Moser W.O.J., **Generators and relations for discrete groups**, Springer-Verlag (1980).
- [26] Vershik A. and Vsemirnov M., *The local stationary presentation of the alternating groups and normal form*, J. Algebra **319** (10) (2008) 4222.
- [27] Fulton W. and Harris J., **Representation theory, a first course**, Springer-Verlag (1991) ISBN :0-3879-7495-8.
- [28] Goldschmidt D. M., **Group characters, symmetric functions and the Hecke algebras**, AMS (1993) ISBN :0-8218-3220-4.
- [29] Sagan B. E., **The Symmetric Group : Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions**, 2nd Ed., Springer (2001) ISBN :0-3879-5067-2.
- [30] Srinivasan M.K., *Notes on the Vershik-Okounkov approach to the representation theory of the symmetric groups*, [http ://www.math.iitb.ac.in/mks/Notes](http://www.math.iitb.ac.in/mks/Notes) (2007).
- [31] Das Sarma S., Freedman M., Nayak C., Simon S. and Stern A., *Non-Abelian Anyons and Topological Quantum Computation*, Review of Mod. Phys., **80** (3) (2008) 1083.
- [32] Tom Dieck T., *Quantum groups and knot algebra*, [http ://www.uni-math.gwdg.de/tammo](http://www.uni-math.gwdg.de/tammo) (2000).
- [33] Goodman F.M., de la Harpe P. and Jones V.F.R., **Coxeter graphs and towers of algebras**, Springer (1989) ISBN :0-3879-6979-9.
- [34] Gelfand I.M. and Tsetlin M.L., *Finite-dimensional representations of the group of unimodular matrices*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **71** (1950) 825.
- [35] Gelfand I.M. and Tsetlin M.L., *Finite-dimensional representations of groups of orthogonal matrices*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **71** (1950) 1017-1020.

- [36] Molev A.I., *Gelfand-Tsetlin bases for classical Lie algebras*, in "Handbook of Algebra", 4, (M. Hazewinkel, Ed.), Elsevier (2006) 109.
- [37] Mitsuhashi H., *The  $q$ -analogue of the alternating group and its representations*, J. Algebra **240** (2) (2001) 535.
- [38] Ogievetsky O. and Poulain d'Andecy L., *Alternating subgroups of Coxeter groups, their spinor extensions and  $q$ -deformations*. Preprint CPT-P095-2008.